

Die Unterrichtseinheit «Magische Quadrate», 1. bis 3. und 4. bis 6. Klasse

Ursula Arnaldi, Ursula Fiechter, Corinne Gonseth Neuenschwander, Fabienne Lüthi
Unter Mitarbeit von Yvonne Liechti, Sandra Luginbühl und Simone Mast

1 EINLEITUNG	2
1.1 Schwerpunkt der Unterrichtseinheit	2
1.2 Definition Magische Quadrate	2
2 DER PLANUNGSPROZESS	3
2.1 Kompetenzorientierung	3
2.1.1 Lehrmittel Mathematik	3
2.1.2 Der Lehrplan des Kantons Bern	4
2.2 Kontext-Situierung	6
2.3 Voraussetzungen	6
2.3.1 Klassenzusammensetzung	6
2.3.2 Lernvoraussetzungen erheben	6
2.4 Bezugspunkt zu bisherigen Lernerfahrungen	7
2.5 Bearbeitungs- und Antwortformate in Aufgaben	7
2.5.1 Lernumgebung entwickeln	7
2.5.2 Lernaufgaben entwickeln	8
2.6 Anforderungsmerkmale	14
2.6.1 Anspruch Komplexität des Inhalts	14
2.6.2 Anspruch der Handlungen, der Fähigkeit/Fertigkeit	14
2.6.3 Anspruch der Materialien	14
2.7 Differenzierungsmöglichkeiten	15
2.7.1 Altersdurchmisches Lernen	15
2.8 Möglichkeiten zur Selbst- und Fremdbeurteilung und zur Lerndiagnose	16
3 VORBEREITUNGSARBEITEN	16
3.1 Unterrichtsverlauf	17
3.2 Räumlichkeiten	18
3.3 Lernmaterialien	19
3.3.1 Selbstständiges Arbeiten auf der Unterstufe ermöglichen	19
3.3.2 Selbstständiges Arbeiten auf der Mittelstufe ermöglichen	19
3.4 Rückmeldungen zur Unterrichtseinheit einplanen	20
4 DIE DURCHFÜHRUNG	20
4.1 Modelle	20
4.1.2 Vorzeigen und schrittweise anleiten auf der Mittelstufe	22
4.2 Dialog, Austausch	23
4.2.1 Lernende beobachten und unterstützen	23
4.2.2 Ideen gemeinsam entwickeln	24
4.3. Unterstützung und Ansporn	25
4.3.1 Ermutigen zum Dranbleiben	25
4.3.2 Anregen, über das Lernen nachzudenken	26
4.4 Lerngerüste	30
4.4.1 Strukturhilfen	30
5 DIE LERNENDEN HALTEN RÜCKSCHAU	30
6 DIE LEHRPERSONEN HALTEN RÜCKSCHAU	31
6.1 Erste allgemeine Eindrücke	31
6.2 Lernziele / mathematische Kompetenzen	32
6.3 Altersdurchmisches Lernen	33
6.3.1 Altersmischung auf der Unterstufe	33
6.3.2 Altersmischung auf der Mittelstufe	33
6.4 Beurteilung der Lernergebnisse	34
6.5 Fazit der Rückschau	35
7 LITERATUR	36

1 Einleitung

1.1 Schwerpunkt der Unterrichtseinheit

Drei Lehrpersonen nutzen die Möglichkeit des Projektauftrags, eine Lernumgebung im Fach Mathematik zum Thema *Magische Quadrate* für die 1. bis 3. Klasse und 4. bis 6. Klasse zu entwickeln.

Die folgenden Kapitel zeigen, wie die Lehrpersonen den Projektauftrag interpretieren und eine Lernumgebung zum Thema *Magische Quadrate* entwickeln und umsetzen. Die Lernumgebung soll durch den Aufbau die «leistungsmässige, natürliche» Differenzierung (vgl. Krauthausen & Scherer 2010; Scherer 2008; Wittmann & Müller 2007c) ermöglichen und unterstützen. Ausgehend von einem gemeinsamen Einstieg ins Thema sollen die Lernenden durch die Anlage angeregt werden, sich anhand der Lernaufgaben ins Thema *Magische Quadrate* zu vertiefen und Neues zu entdecken. In der Unterrichtseinheit wollen die Lehrpersonen sowohl das eigenständige als auch das kooperative Lernen fördern und fördern. Die Lernenden der drei Mehrjahrgangsklassen sind sich gewohnt, im Unterricht Verantwortung für das eigene Lernen zu übernehmen. Zudem sind sie bereit, einander zu unterstützen und zu helfen, sich gegenseitig Sachverhalte und Lerninhalte zu erklären. Das Thema *Magische Quadrate* eignet sich aus Sicht der Lehrpersonen gut, um an diesen Schwerpunkten sowie an mathematischen Kompetenzen zu arbeiten.

Ziel der folgenden Ausführungen ist es, die Planung, Vorbereitung, Durchführung und Rückschau der Lehrpersonen nachzuvollziehen und daran anschliessend eine eigene altersdurchmischte Unterrichtseinheit durchführen zu können. Die Planungsschritte und die Auseinandersetzung mit dem Unterricht in einem jahrgangsübergreifenden Setting sehen wir als funktionierende Beispiele, die variiert und weiterentwickelt werden können. Sie zeigen eine Möglichkeit auf, wie altersdurchmisches Lernen arrangiert werden kann.

Um die Arbeit der Lehrpersonen nachvollziehen zu können, setzen sich die Leserinnen und Leser der folgenden Kapitel sinnvollerweise mit folgenden Fragen auseinander:

Unterrichtsplanung

- Wie planen die Lehrpersonen den Unterricht an MJK?
- Mit welchen Unterrichtsmethoden kann das alterdurchmischte Lernen unterstützt und gefördert werden?

Unterrichtsdurchführung

- Wie führen die Lehrpersonen den altersdurchmischten Unterricht durch?
- Wie können Lernende im adL unterstützt und begleitet werden?
- Wie können Lernergebnisse der SuS beurteilt werden?

Unterrichtsreflexion

- Wie beurteilen die Lehrpersonen rückblickend ihren Unterricht?

Kritische Würdigung

- Stärken, Schwächen der Unterrichtseinheit?
- Weiterentwicklungsmöglichkeiten?

1.2 Definition Magische Quadrate

Mathematik wird im Zahlenbuch als «Wissenschaft von Mustern» dargestellt (Wittmann & Müller 2007c:4). *Magische Quadrate* sind geeignet, um Muster zu untersuchen, weiterzuführen oder auch zu erfinden. «Muster dienen als Nährboden für die allgemeinen Lernziele Mathematisieren, Explorieren, Argumentieren und Formulieren» (Wittmann & Müller 2007c:4). Die Auseinandersetzung mit *Magischen Quadraten* fördert somit das «Entdecken von Zusammenhängen und das geschickte und sichere Rechnen» (Wittmann & Müller 2008b:85).

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Abbildung 1: Magisches 3x3-Quadrat

Magische Quadrate werden im Schweizer Zahlenbuch 3 wie folgt definiert: «Ein quadratisches Zahlenschema aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 ... n^2 heisst magisches Quadrat der Ordnung n , wenn die n Zahlen in jeder Zeile, Spalte und Diagonalen die gleiche (magische) Summe ergeben» (Wittmann & Müller 2008b:85). Im Zahlenbuch 1 (Wittmann & Müller 2007ab:229) werden magische Quadrate als «Zauberquadrate» eingeführt. In den weiteren Bänden des Zahlenbuchs werden Zahlenquadrate und magische Quadrate unterschieden. Dies ermöglicht, magische Quadrate und Zahlenquadrate zu vergleichen, ihre spezifischen Eigenschaften zu untersuchen und zu beschreiben.

2 Der Planungsprozess

An insgesamt vier Planungssitzungen hat das Team IVP die Planungsgruppe Mathematik beobachtet. Zwei der vier Planungssitzungen fanden mit dem Fachexperten Ueli Hirt, Dozent Fachdidaktik Mathematik statt. Für die nachfolgende Beschreibung der von den Lehrpersonen entwickelten Unterrichtseinheit orientieren wir uns an den acht Gesichtspunkte für die Analyse, Auswahl und Konstruktion von Aufgaben nach Adamina (2010a:123). Diese Struktur soll es ermöglichen, interessierten Lehrpersonen und Studierenden verständlich und nachvollziehbar darzulegen, wie der Planungsprozess verlaufen ist und welche Schwerpunkte die Lehrpersonen mit dem Fachexperten diskutiert haben. Zudem soll aufgezeigt werden, an welchen didaktischen Gesichtspunkten sich die Lehrpersonen bei der Planung orientiert haben und welche Schwerpunkte bei der Umsetzung der Unterrichtseinheit aufgenommen wurden.

Gesichtspunkte für die Analyse, Auswahl und Konstruktion von Aufgaben

1. *Kompetenzorientierung*
2. *Kontext-Situierung*
3. *Voraussetzungen, Passungen*
4. *Bezugspunkte zu bisherigen Lernerfahrungen*
5. *Bearbeitungs- und Antwortformate in Aufgaben*
6. *Ansprüche*
7. *Differenzierungsmöglichkeiten*
8. *Möglichkeiten zur Selbst- und Fremdbeurteilung und zur Lerndiagnose*

(Adamina 2010a: 123)

2.1 Kompetenzorientierung¹

Orientierung der Aufgaben an grundlegenden Kompetenzen

(Fähigkeiten und Fertigkeiten, grundlegende thematisch-inhaltliche Konzepte, grundlegende Erfahrungsmöglichkeiten zur Entwicklung von Haltungen und Handlungsbereitschaften).

(Adamina 2010a:123)

Für das Festlegen der Kompetenzen und Lernziele orientieren sich die Lehrpersonen am Lehrmittel Mathematik, *Schweizer Zahlenbuch* (Wittmann & Müller 2007abcd, 2008abc; Affolter et al. 2009ab, 2010abc) und am Lehrplan des Kantons Bern (Erziehungsdirektion 2006/1995).

2.1.1 Lehrmittel Mathematik

Die Lehrpersonen setzen sich an einer ersten Planungssitzung mit dem Lehrmittel Schweizer Zahlenbuch für das erste bis sechste Schuljahr (Wittmann & Müller 2007abcd, 2008abcd; Affolter et al. 2009ab, 2010abc) auseinander.

Im Schulbuch, im Arbeitsheft und im Begleitband für die Lehrperson finden sich verschiedene Aufgabenstellungen und Erläuterungen zu Zahlenquadraten oder magischen Quadraten. Das Thema wird auf allen Stufen der Primarschule ausser der 4. Klasse thematisiert. Zahlenquadrate und magische Quadrate werden im Schweizer Zahlenbuch dem Bereich Arithmetik zugeordnet (vgl. *Tabelle 1*).

¹ In der Broschüre wurden die Überlegungen zur Kompetenzorientierung dem Lehrplan 21 angepasst.

Schweizer Zahlenbuch	1	2	3	4	5	6
Schulbuch	94/95	90	18		80/81	98/99
Arbeitsheft	58/59					83/84
Begleitband	229ff./233ff.	235f.	85ff.		291ff.	377ff.

Tabelle 1: Aufgabenstellungen und Erläuterungen Zahlenquadrate und magische Quadrate im Schweizer Zahlenbuch in den verschiedenen Schuljahren (Yvonne Liechti, Sandra Luginbühl, Simone Mast)

Aus Sicht der Lehrpersonen bietet das Thema die Möglichkeit zur Festigung und Entwicklung von fachlichen Kompetenzen. Auch prozessbezogene Kompetenzen, wie beispielsweise selbstständig oder gemeinsam mit anderen Lernenden Probleme lösen, sollen durch die Lernumgebung gefördert werden. Neben den fachlichen Kompetenzen wollen die Lehrpersonen auch zum kooperativen Lernen anleiten. Unabhängig vom Alter tauschen sich die Lernenden über ihre Lernwege und Strategien aus und lernen voneinander. Diese Vorüberlegungen stimmen mit den Leitvorstellungen des Schweizer Zahlenbuches überein. Im Lehrmittel wird dem aktiv-entdeckenden Lernen, dem gemeinsamen (sozialen) Lernen und dem kooperativen Lernen ein hoher Stellenwert beigemessen. Die natürliche Differenzierung (ausgehend von den Lernenden) und das produktive Üben werden durch die im Lehrmittel formulierten Lernaufgaben (Wittmann & Müller 2007abcd, 2008abc; Affolter et al. 2009ab, 2010abc) trainiert und gefestigt.

2.1.2 Der Lehrplan des Kantons Bern

Die im Schweizer Zahlenbuch (Wittmann & Müller 2007abcd, 2008abcd; Affolter et al. 2009ab, 2010abc) aufgeführten Überlegungen lassen sich mit den im Lehrplan des Kantons Bern (Erziehungsdirektion 2006/1995) formulierten Grobzielen vergleichen. Das Thema entspricht, wie im Schweizer Zahlenbuch dargelegt, dem Bereich *Arithmetik/Algebra* und *Geometrie* (in Tabelle 2 grün hervorgehoben). Aus Sicht der Lehrpersonen sollen das *Vorstellungsvermögen*, *Kenntnisse und Fertigkeiten*, die *Mathematisierungsfähigkeit* und das *Problemlöseverhalten* geschult werden (vgl. Tabelle 2).

	Arithmetik Algebra	Geometrie	Sachrechnen	Stochastik
Vorstellungsvermögen				
Kenntnisse und Fertigkeiten				
Mathematisierungsfähigkeit				
Problemlöseverhalten				

Tabelle 2: Richtziele Mathematik im Lehrplan Kanton Bern (Erziehungsdirektion 2006/1995: MATH 5)
(Yvonne Liechti, Sandra Luginbühl, Simone Mast)

Die in Tabelle 3 dargestellten Grobziele werden im Lehrplan des Kantons Bern (Erziehungsdirektion 2006/1995) als übergreifend für alle Schuljahre der Primarstufe aufgeführt. Dies kommt der Entwicklung der Lernumgebung, in der das jahrgangsübergreifende Lernen unterstützt werden soll, entgegen. Die Lehrpersonen entscheiden, sich bei der Planung der Lernumgebung an diesen Grobzielen zu orientieren.

	1.+2. Klasse.	3.+4. Klasse	5.+6. Klasse
Grobziele Arithmetik/Algebra	Operationen verstehen und ausführen (im Bereich des Kopfrechnens)		
	Gesetzmässigkeiten zum vorteilhaften Rechnen nutzen (Zusammenhänge und Rechengesetze, Addition und Subtraktion bzw. Ergänzen)		
	Bezüge zwischen Sachverhalte und Gleichungen erkennen, lösen (Platzhalter, durch Umkehrüberlegungen und Einsetzen lösen)		

Tabelle 3: Grobziele Arithmetik/Algebra im Lehrplan Kanton Bern für alle sechs Schuljahre (Erziehungsdirektion 2006/1995: MATH 7, MATH 10, MATH 14f.) (Yvonne Liechti, Sandra Luginbühl, Simone Mast)

Aufgrund der Auseinandersetzung mit dem Lehrmittel und dem Lehrplan definieren die Lehrpersonen vier mathematische, aufeinander aufbauende Kompetenzbereiche, mit denen sich die Schülerinnen und Schüler während mindestens zwei Wochen intensiv im Mathematikunterricht auseinandersetzen werden:

Kompetenzbereiche für die Lernumgebung *Magische Quadrate*:

Die Schülerinnen und Schüler können

1. Magische Quadrate **bilden**
 2. Magische Quadrat **untersuchen**: Gesichtspunkte erarbeiten und aufzeigen, wo sind grosse kleine, gerade, ungerade Zahlen?
 3. Mit magischen Quadraten **operieren**
 4. Magische Quadrate **erfinden**
- (Beobachtungsprotokoll 28.9.2010)

Folgenden Kompetenzerwartungen werden festgehalten:

Die Schülerinnen und Schüler können

- Magische Quadrate systematisch untersuchen
- Zusammenhänge in magischen Quadraten erkennen
- Magische Quadrate systematisch verändern
- Magische Quadrate selber erzeugen
- Magische Quadrate berechnen
- Die magische Summe berechnen

Zusätzlich werden allgemeine überfachliche Kompetenzen diskutiert und formuliert:

Die Schülerinnen und Schüler können

- Verantwortung für das eigene Lernen übernehmen
- selbstständig arbeiten
- Eigene Lösungswege suchen, Lösungen überprüfen und hinterfragen
- Ausdauer bei der Bearbeitung der Aufgaben zeigen
- mit anderen zusammenarbeiten
- Ergebnisse in Gruppen diskutieren
- Lösungswege vergleichen und übertragen, Strategien entwickeln.
- Vermutungen äussern und überprüfen
- Ergebnisse und Erkenntnisse darstellen und formulieren

(Beobachtungsprotokoll 28.9.2010)

2.2 Kontext-Situierung

Kontextbezug (Sinn, Bedeutung, Authentizität für die Lernenden; Bezug zur Erfahrungs- und Lebenswelt und zum ausserschulischen Lernen)

(Adamina 2010a: 123)

Wie im Kapitel 2.1.1 dargelegt verstehen die Autoren des Zahlenbuchs Mathematiklernen als aktiv-entdeckenden, konstruktiven Prozess (vgl. Wittmann & Müller 2007c:10). Die Lehrpersonen wollen sich beim Erarbeiten der Lernumgebung an diesen Leitideen orientieren. Sie möchten für die Lernenden eine anregende und vielseitige Unterrichtseinheit bereitstellen, in der sie sich mit den vier festgelegten, aufeinander aufbauenden Kompetenzbereichen auseinandersetzen können (vgl. 2.1.2). Die Kompetenzerwartungen wollen sie den Lernenden offen kommunizieren. Die Lernaufgaben sollen so formuliert werden, dass sie verschiedene Lernwege zulassen. Die Lehrpersonen wollen kooperative Arbeitsformen bewusst einplanen um das Miteinander und Voneinander lernen zu unterstützen. Ab und an sollen Lernaufgaben gemeinsam im Plenum besprochen werden, um vorhandenes Wissen zu überprüfen und zu konsolidieren.

2.3 Voraussetzungen

Voraussetzungen, Vorwissen der Lernenden, um die Aufgabe zu lösen

(Adamina 2010a:123)

2.3.1 Klassenzusammensetzung

Die Unterrichtseinheit wird für drei altersgemischte Schulkassen geplant. In der *Unterstufe* (1. bis 3. Klasse) nehmen 18 Lernende am Projekt teil: vier Lernende der 1. Klasse, sechs Lernende der 2. Klasse und acht Lernende der 3. Klasse.

Für die *Mittelstufe* (4. bis 6. Klasse) gibt es zwei parallele Unterrichtsdurchführungen: In der einen Klasse nehmen 21 Lernende am Projekt teil: sieben Lernende der 4. Klasse, drei Lernende 5. Klasse und elf Lernende der 6. Klasse. In der anderen Klasse nehmen 18 Lernende am Projekt teil: fünf Lernende der 4. Klasse, fünf Lernende der 5. Klasse und acht Lernende der 6. Klasse.

3.3.2 Lernvoraussetzungen erheben

Aus Sicht der Lehrpersonen müssen die Lernenden über die folgenden mathematischen und überfachlichen Kompetenzen verfügen, um die Lernaufgaben erfolgreich lösen zu können:

- Addition von mehreren Summanden ausführen,
- Subtraktion bzw. Ergänzen von Zahlen vornehmen
- Multiplikation und Division bei weiterführenden Lernaufgaben ausführen
- auf basale Fähigkeiten wie beispielsweise visuelle Wahrnehmung, Grafomotorik, Raumorientierung zurückgreifen
- Anweisungen verstehen, Dialoge führen

Die individuellen Lernvoraussetzungen der Lernenden in Bezug auf die dargestellten Kompetenzen schätzen die Lehrpersonen als sehr heterogen ein. Deshalb planen die Lehrpersonen, dass mathematische Operationen beim Berechnen von Zahlenquadraten und magischen Quadraten sowohl mit einfachen Zahlen als auch mit Dezimalzahlen oder Brüchen ausgeführt werden können. Entsprechend der Selbsteinschätzung oder durch Beratung der Lehrpersonen bestimmen die Lernenden den Schwierigkeitsgrad einer Lernaufgabe.

Zu den Lernaufgaben wollen die Lehrpersonen verschiedene Lernzugänge mit verschiedenen Lernmaterialien ermöglichen, um das aktive-entdeckende Lernen zu fördern und zu unterstützen.

2.4 Bezugspunkt zu bisherigen Lernerfahrungen

Bezugspunkt zu bisherigen Lernerfahrungen zum aktuellen Thema bzw. Unterrichtsverlauf

(Adamina 2010a:123)

An einer weiteren Planungssitzung diskutieren die Lehrpersonen Möglichkeiten, wie sich individualisierende Lernwege und das soziale, altersdurchmischte Lernen im Unterricht konkret realisieren lassen. Eine Lehrperson möchte die Lernenden oft in den bestehenden Lerngruppen und Tandems zusammenarbeiten lassen. Für den Unterrichtsverlauf werden weitere Bezugspunkte diskutiert und festgehalten. Diese haben sich im bisherigen Unterricht der drei Mehrjahrgangsklassen bewährt und sollen auf die Lernumgebung Mathematik übertragen werden:

- *Im Plenum in das neue Thema (Lernumgebung) einführen.* Anschliessend erfolgt ein individuelles Üben und Vertiefen von Lerninhalten.
- *Das kooperative Lernen bewusst initiieren und unterstützen.* Die Lehrpersonen legen fest, wann sich die Lernenden während des Arbeitsprozesses zum Besprechen einer Lernaufgabe oder zum Erarbeiten von neuen Lerninhalten austauschen.
- *Offene Arbeitsformen ermöglichen.* Lernende bestimmen die Reihenfolge der Aufgaben und wählen selber aus, mit wem sie zusammenarbeiten wollen.
- *Unterschiedliche Kontrollsysteme zur individuellen Ergebnisüberprüfung anbieten.* Die Lernwege und Resultate werden mit der Lehrperson in Kleingruppen oder im Plenum besprochen.
(Beobachtungsprotokoll 28.9.2010)

2.5 Bearbeitungs- und Antwortformate in Aufgaben

Bearbeitungs- und Antwortformate (Struktur, Offenheit, Lernwege u.a.)

(Adamina 2010a:123)

2.5.1 Lernumgebung entwickeln

Die Lehrpersonen entscheiden an einer nächsten Planungssitzung, die vier festgelegten Kompetenzbereiche (vgl. 2.1.2.) als (Kompetenz-) Inseln auf einer Navigationskarte darzustellen (vgl. Abbildung 5). Die Idee der Navigationskarte entnehmen sie dem Französischlehrmittel *mille feuilles* (Grossenbacher et al. 2012) und passen sie für ihre Lernumgebung an (vgl. Abbildung 2).

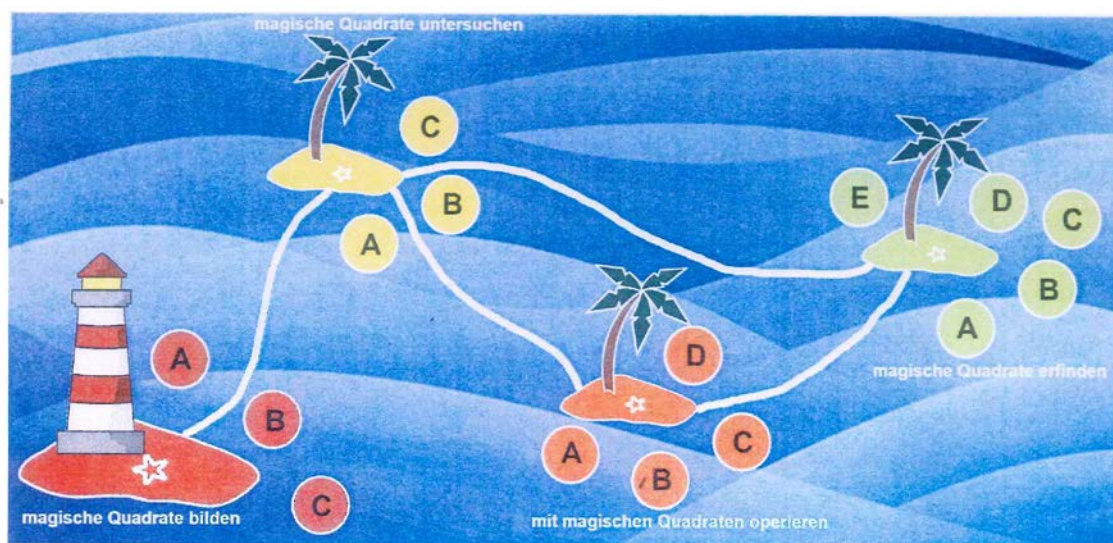


Abbildung 2: Navigationskarte für die Mittelstufe zu den vier mathematischen Kompetenzen der Lernumgebung Magische Quadrate: rote Insel, drei Aufgaben, ‚Magische Quadrate bilden‘, gelbe Insel, drei Aufgaben, ‚Magische Quadrate untersuchen‘, orange Insel, vier Aufgaben, ‚mit magischen Quadraten operieren‘, grüne Insel, fünf Aufgaben, ‚Magische Quadrate erfinden‘ (Yvonne Liechti, Sandra Luginbühl, Simone Mast).

Die Lehrpersonen diskutieren mit dem Fachexperten, wie viel Offenheit sie in der Lernumgebung zulassen wollen. Für mathematisch schwächere und jüngere Lernende schätzt die Lehrperson der *Unterstufe* ein zu offenes Vorgehen als schwierig ein. Sie vermutet, dass dies eine stärkere Begleitung durch die Lehrpersonen erfordern würde. Gemäss ihrer Einschätzung wären einzelne Lernende mit einem zu offenen Vorgehen überfordert und würden entsprechend unselbstständig arbeiten. Auf Grund dieser Überlegungen entscheiden die Lehrpersonen, den Lernweg von Insel zu Insel vorzugeben. Auf jeder Insel werden entsprechend offene und anspruchsvolle Lernaufgaben angeboten. Innerhalb einer Lernaufgabe sollen unterschiedliche Lern- und Lösungswege gewährleistet sein.






Die Lehrpersonen besprechen folgenden möglichen Unterrichtsverlauf: Der Start in die Lernumgebung soll im Plenum erfolgen. In der ersten Doppellektion wollen sie in die *Aufgabe A*, beim Leuchtturm auf der roten Insel, *Magische Quadrate bilden* einführen. Anschliessend werden den Lernenden in dieser Unterrichtslektion die weiteren Lernaufgaben auf der *roten Insel* zur freien Auswahl zur Verfügung gestellt. In der nächsten Doppellektion sollen sich die Lernenden nach einer Einführung mit den Lernaufgaben auf der *gelben Insel*, *Magische Quadrate untersuchen*, auseinandersetzen. Ab der dritten Doppellektion wollen die Lehrpersonen den Lernenden alle Inseln und alle Lernaufgaben zur freien Auswahl bereitstellen. Die Lernenden sollen bestimmen, auf welcher Insel sie arbeiten und die die Lernaufgabe selbstständig auswählen. Sie können die Aufgaben alleine oder in der Gruppe lösen. Die Visualisierung (Navigationskarte) soll die Lernenden ansprechen. Das Meer, die Inseln, Palmen und Kokosnüsse erinnern an Schatzsuche und grosse Entdeckungen (entdeckendes Lernen) (vgl. *Abbildung 2*).

2.5.2 Lernaufgaben entwickeln

Für die Entwicklung der Lernaufgaben orientieren sich die Lehrpersonen an den Aufgaben zu den Zahlenquadraten und magischen Quadraten in den Schweizer Zahlenbüchern der 1. bis 6. Klasse (Wittmann & Müller 2007abcd, 2008abc; Affolter et al. 2009ab, 2010abc). In der Auseinandersetzung mit den Lernaufgaben entdecken die Lehrpersonen neue Aspekte der Zahlenquadrate und magischen Quadrate. Sie setzen sich mit ihrem eigenen Sach- und Fachwissen auseinander. Dies ist Voraussetzung, um die Lernenden entsprechend begleiten und Lernschwierigkeiten antizipieren zu können (vgl. *Kapitel 4*). Solche Entdeckungen wollen sie auch den Lernenden ermöglichen.

Die Lernaufgaben sollen so angelegt werden, dass sie Differenzierung zulassen und der Schwierigkeitsgrad gesteigert werden kann.

In der folgenden Abbildung (vgl. *Abbildung 3*) werden die vier Inseln mit den entsprechenden Lernaufgaben für die *Unter-* und *Mittelstufe* in einer Übersicht differenziert nach Schwierigkeitsgrad dargestellt (Anzahl Kokosnüsse). Der Schwierigkeitsgrad nimmt von links nach rechts zu. In den Zeilen sind die Lernaufgaben den Kompetenzen (Inseln) zugeordnet. Tendenziell werden die Lernaufgaben von Insel zu Insel komplexer und schwieriger. Insbesondere die Insel *Magische Quadrate erfinden* weist am meisten schwierige Lernaufgaben auf. Die Bezüge zu den Zahlenbüchern sind in Tabelle 1 dokumentiert.

Schwierigkeitsgrad in Kokosnüssen				
Magische Quadrate bilden 	US	A Zahlenquadrate bilden, erfinden B Magisch oder nicht?		
	MS	A Magische Zahlenquadrate bilden berechnen	B Kartenspiel	C Würfelnetz
Magische Quadrate untersuchen 	US	A Vergleichen Lo Shu und ihre sieben Geschwister	B Dividieren durch 3 C Multiplizieren	D Zahlenfolgen vergleichen, Muster entdecken
	MS	A Summe berechnen, Muster suchen C Aufbau und Struktur untersuchen		B Vergleichen, Zusammenhänge beschreiben



Mit magischen Quadraten operieren 	US	A Berechnen B Eins mehr	C Vergleichen D Addieren, untersuchen	
	MS	B Verändern C Summe dividieren		A Ergänzen D Verändern, berichten
Magische Quadrate erfinden 	US	A Bilden, berechnen	B Quadrate mit der magischen Summe 45 bilden C Eigene magische Quadrate erfinden, Summe berechnen	D Quadrate mit geraden oder ungeraden Zahlen bilden, Summe berechnen
	MS	C Bildlich darstellen		A Erfinden B Erfinden, Summe ist vorgegeben D Untersuchen E erfinden, beschreiben

Abbildung 3: Lernaufgaben zu den mathematischen Kompetenzen der Lernumgebung *Magische Quadrate* differenziert nach Unter- und Mittelstufe, (Kompetenz-)Inseln und Schwierigkeitsgraden (Yvonne Liechti, Sandra Luginbühl, Simone Mast)

Geschlossene, halboffene und offene Lernaufgaben

Beispiele von Lernaufgaben auf der Insel *Magische Quadrate bilden* und *Magische Quadrate untersuchen* werden nun unter dem Aspekt des Bearbeitungs- und Antwortformats dargestellt. Es wird zwischen Unter- und Mittelstufe unterschieden.

Geschlossene Aufgaben	Halboffene Aufgaben	Offene Aufgaben
<i>Aufgabe strukturiert, Antwortmöglichkeiten vorstrukturiert (z.B. Einfach-Mehrfachwahl, richtig-falsch, Zuordnung, Rangliste)</i> <i>Kreuze an, ordne zu, verbinde, entscheide, nenne...</i>	<i>Aufgaben strukturiert, z.B. Zuordnung, Mind-Map, Texte und Skizzen, Kurzantworten, Ergänzungen (z.B. in Grafiken)</i> <i>Erkläre, begründe, vergleiche, beschrifte, ergänze...</i>	<i>Unterschiedliche Lern- und Lösungswege und Antworten</i> <i>Untersuche, erkunde, entwickle, diskutiere...</i>

(Adamina 2010a:123)

Lernaufgaben für die Unterstufe (1. bis 3. Klasse)

Für den Einstieg in die Unterrichtseinheit wählt die Lehrperson der *Unterstufe* auf Grund der unterschiedlichen mathematischen Voraussetzungen und Möglichkeiten des selbstständigen Arbeitens ein offenes Aufgabenformat aus. Die Lernenden sollen auf der ersten Insel *Magische Quadrate bilden*, Aufgabe A, eigene Zahlenquadrate bilden (vgl. Aufgabe A, Abbildung 4).

Bei Aufgabe B wählt die Lehrperson ein eher halboffenes Vorgehen mit vorstrukturierten Antwortmöglichkeiten aus. Bei dieser Aufgabe geht es darum herauszufinden, ob es sich bei den neun abgebildeten Zahlenquadraten um magische Quadrate handelt oder nicht. Auftrag 1. enthält die Aufforderung, die Zahlenquadrate zu untersuchen und herauszufinden, welche der abgebildeten Zahlenquadrate magisch sind, welche nicht. In einem zweiten Schritt sollen die Lernenden die Unterschiede zwischen Zahlenquadraten und magischen Quadraten herausarbeiten Zur Überprüfung wird ihnen am Schluss die Frage gestellt: «Woran erkennst du die *magischen Quadrate*?» (vgl. Aufgabe B, Abbildung 4).

Einstieg		
A	Zahlenquadrate erfinden	

Auftrag: Erfinde eigene Zahlenquadrate!

Einstieg		
B	Magische Zahlenquadrate oder nicht?	

Auftrag: 1. Welche Zahlenquadrate sind magisch? Welche sind es nicht?
2. Übermale nur die magischen Quadrate mit Gelb.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

7	12	5
6	8	10
11	4	9

1	4	1
2	2	2
3	0	3

5	12	7
10	8	6
9	4	11

8	18	10
6	10	14
16	3	12

5	5	5
5	5	5
5	5	5

5	2	1
0	2	6
3	4	1

13	8	9
6	10	14
11	12	7

30	18	12
18	12	30
12	30	18

Woran erkennst Du die magischen Quadrate?

.....

.....

Abbildung 4: Lernaufgabe A und B für die Unterstufe auf der Insel Magische Quadrate bilden (Yvonne Liechti)

Im Gegensatz zu *Lernaufgabe A* müssen die Lernenden bei *Lernaufgabe B* die neun Zahlenquadrate selber berechnen und untersuchen. Um die Frage unter Punkt 1. beantworten zu können, müssen die Lernenden wissen, was Zahlenquadrate von magischen Quadraten unterscheidet. Das bereits erworbene Wissen muss entsprechend der Aufforderung *Woran erkennst du die magischen Quadrate?* abschliessend reproduziert werden (vgl. *Aufgabe A und B, Abbildung 4*). *Abbildung 15* zeigt auf, wie ein Schüler (2. Klasse) diese Lernaufgabe gelöst hat.

Auf der zweiten Insel, *Magische Quadrate untersuchen, Aufgabe A*, werden die Lernenden angewiesen, in einem ersten Schritt die Schildkröte Lo Shu mit ihren sieben Geschwistern zu vergleichen. In einem zweiten Schritt müssen die Lernenden die Zahl in der Mitte des Schildkrötenpanzers erkennen und festhalten (vgl. *Abbildung 5*).

Bei *Aufgabe B* geht es erneut um die Zahl in der Mitte. Die Lernenden müssen in einem ersten Schritt die magischen Summen der vier Quadrate berechnen. Anschliessend werden sie angewiesen, die magischen Summen durch drei zu dividieren. Die Fragen: «*Was fällt dir auf? Kannst du begründen?*», fordert die Lernende zum Nachdenken über die Systematik von magischen Quadraten auf.

Bei *Aufgabe C* werden die Lernenden angewiesen zu beobachten, was mit den magischen Summen geschieht, wenn sie beispielsweise jede Zahl im magischen Quadrat mit derselben Zahl multiplizieren. Als Vorlage erhalten die Lernenden die Abbildung von Lo Shu.

Bei *Aufgabe D* geht es dann darum, Zahlenfolgen miteinander zu vergleichen und Muster zu finden. Auch auf dieser Insel werden die Lernenden durch formulierte Fragen wie beispielsweise: «*Was fällt dir auf, kannst du begründen?*», zur Reflexion angeregt (vgl. *Abbildung 5*).

Magische Quadrate untersuchen		
A	Geschwister von Lo Shu	
<p>Auftrag: Vergleiche Lo Shu und ihre sieben Geschwister:</p> <p>1. Färbe die geraden Zahlen gelb und die ungeraden Zahlen rot.</p>		
<p>2. Welche Zahlen stehen in der Mitte?</p>		

Magische Quadrate untersuchen																			
B	Die Zahl in der Mitte																		
<p>Auftrag: 1. Dividiere (teile) die magische Summe dieser Quadrate durch drei.</p>																			
<table border="1"> <tr><td>4</td><td>9</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>8</td><td>1</td><td>6</td></tr> </table>	4	9	2	3	5	7	8	1	6	<table border="1"> <tr><td>7</td><td>12</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>4</td><td>9</td></tr> </table>	7	12	5	6	8	10	11	4	9
4	9	2																	
3	5	7																	
8	1	6																	
7	12	5																	
6	8	10																	
11	4	9																	
<table border="1"> <tr><td>5</td><td>12</td><td>7</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>6</td></tr> <tr><td>9</td><td>4</td><td>11</td></tr> </table>	5	12	7	10	8	6	9	4	11	<table border="1"> <tr><td>13</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>6</td><td>10</td><td>14</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>7</td></tr> </table>	13	8	9	6	10	14	11	12	7
5	12	7																	
10	8	6																	
9	4	11																	
13	8	9																	
6	10	14																	
11	12	7																	
<p>Was fällt Dir auf? Kannst Du begründen?</p> <p>.....</p> <p>.....</p>																			

Magische Quadrate untersuchen		
C	Zahlen multiplizieren	
<p>Auftrag: 1. Wähle ein Geschwister von Lo Shu und fülle die Schildkröte aus.</p> <p>2. Multipliziere jede der Zahlen mit derselben Zahl und fülle mit den Ergebnissen ein neues Zahlenquadrat aus.</p> <p>3. Vergleiche die Schildkröte mit dem neuen Zahlenquadrat!</p>		
<p>Vielleicht brauchst du noch ein 2. Beispiel:</p>		
<p>Was fällt dir auf? Kannst du begründen?</p> <p>.....</p>		

Magische Quadrate untersuchen		
D	Zahlen multiplizieren	
<p>Auftrag: Vergleiche die eingesetzten Zahlenfolgen und die dazugehörige magische Summe.</p> <p>1. Setze verschiedene Zahlenfolgen ein (zBsp: 10, 20, 30 usw.)</p> <p>2. Beobachte, wie sich die eingesetzten Zahlen und die dazugehörigen magischen Summen verhalten. Findest du Muster?</p>		
<p>1. Zahlenfolge:</p> <p>Magische Summe:</p>		
<p>2. Zahlenfolge:</p> <p>Magische Summe:</p>		

Abbildung 5: Lernaufgaben auf der Insel Magische Quadrate untersuchen für die Unterstufe (Yvonne Liechti)
(vgl. Schweizer Zahlenbuch 1, Wittmann & Müller 2007b:95; Schweizer Zahlenbuch 2, Wittmann & Müller 2007b:K28).

Lernaufgaben für die Mittelstufe (4. - 6. Klasse)

Auch die Lehrpersonen auf der Mittelstufe wählen für den Einstieg in die Unterrichtseinheit auf Grund der unterschiedlichen mathematischen Voraussetzungen und Möglichkeiten des selbstständigen Arbeitens ein offenes Aufgabenformat aus. Die Lernenden sollen auf der ersten Insel *Magische Quadrate bilden*, *Aufgabe A*, eigene Zahlenquadrate bilden und die magische Summe berechnen. Sie können selber entscheiden, ob sie eher mit einem einfacheren magischen 3×3 Quadrat beginnen oder ob sie beispielsweise gleich versuchen, ein anspruchsvolleres magisches 4×4 oder 5×5 Quadrat zu bilden. Die Lehrpersonen diskutieren die Möglichkeit, dass Lernende der 6. Klasse und besonders begabte Lernende angeregt werden, die Lernaufgabe auch mit Dezimalzahlen oder Brüchen zu lösen (vgl. *Abbildung 6*).

Bei *Lernaufgabe B* sollen die Lernenden mit einem Kartenspiel ein 4×4 Quadrat bilden. Die Herausforderung besteht darin, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den Diagonalen jede Farbe und jeder Kartenwert nur einmal vorkommen darf. Den Lernenden wird das Kartenspiel kopiert zur Verfügung gestellt. So wird ihnen ein spielerischer und handelnder Zugang zum Problemlösen gewährt. Anschliessend übertragen die Lernenden ihre Lösung in das Mathematikheft und lassen sie von einer Mitschülerin, einem Mitschüler überprüfen (vgl. *Abbildung 6*).

A	Magische Quadrate bilden
Auftrag:	Bilde 3×3 -, 4×4 - oder 5×5 -Zahlenquadrate und berechne ihre magischen Summen.
	Zahlenquadrate: Eine Zahl kann mehrmals verwendet werden. Magische Quadrate: Jede Zahl wird nur einmal verwendet.
Material:	Kopiervorlage 3×3 -, 4×4 - und 5×5 -Quadrate
Kontrolle:	Lasse deine magischen Quadrate von einem anderen Kind überprüfen: <ul style="list-style-type: none">- in jeder Zeile/Spalte ist die Summe gleich.- in beiden Diagonalen ist die Summe gleich.


B	Magische Quadrate bilden
Auftrag:	Nimm aus einem Jasskartenspiel von jeder Farbe die vier Karten: Ass, König, Ober und Under. Lege die Karten so in ein 4×4 -Quadrat, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen jede Farbe und jeder Wert genau einmal vorkommt. Suche weitere Möglichkeiten. Übertrage deine Lösungen ins Heft (Ass = A, König = K, Ober = O, Under = U).
	
Material:	Jasskartenvorlage
Kontrolle:	Zeige deine Lösungen einer Mitschülerin / einem Mitschüler und lasse sie prüfen.



Abbildung 6: Lernaufgaben A und B auf der Insel *Magische Quadrate bilden* für die Mittelstufe (Sandra Luginbühl, Simone Mast)
(vgl. Schweizer Zahlenbuch 6, Affolter et al. 2010c:98)

Die Lernaufgaben auf der Insel *Magische Quadrate untersuchen* sind analog zur Insel *Magische Quadrate berechnen* aufgebaut. Die Aufgaben werden jedoch zunehmend komplexer. Während die Lernenden bei der *Lernaufgabe A* die Summen der Quadrate von Euler, Dürer und Agrippa **berechnen** sollen, wird bei *Lernaufgabe B* verlangt, dass sie die Summe aller Zahlen im magischen Quadrat **mit der magischen Zahl vergleichen**. Zusammenhänge sollen schriftlich beschrieben werden. Bei der *Lernaufgabe C* sollen die Lernenden das erworbene Wissen über den Aufbau und die Struktur von magischen Quadraten überprüfen, indem sie ihre Beispiele im Mathematikheft oder die vorgegebenen Quadrate **untersuchen**. Mit ausgewählten Fragen wie: *Wo stehen ungerade, gerade Zahlen? Welche Zahl steht in der Mitte? Vergleiche mit der magischen Summe. Was fällt dir auf?* werden die Lernenden zur Reflexion angeleitet. Zusätzlich sollen die Lernenden ihre Ergebnisse **überprüfen**, indem sie die Aussagen auf dem Arbeitsblatt ergänzen (vgl. *Abbildung 7*, *Lernaufgaben A, B, C*).

A Magische Quadrate untersuchen

Auftrag: Berechne in den Quadraten von Euler, Dürer und Agrippa die Summe der eingefärbten Zahlen. Vergleiche mit der magischen Summe. Suche weitere Muster, die zur magischen Summe führen.

Der bekannte Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) hat sich mit magischen Quadraten beschäftigt.

Magisches Quadrat des berühmten Mathematikers Leonhard Euler (1707-1783). Er hat ein 4x4-Quadrat gefunden, das die Zahlen 1 bis 16 enthält.

1	11	8	16
14	4	15	10
13	12	5	9
6	7	3	17

Magisches Quadrat von Albrecht Dürer (1471-1521). Er hat ein 4x4-Quadrat gefunden, das die Zahlen 1 bis 16 enthält.

8	16	9	25
10	4	24	12
15	17	7	23
22	19	21	3

Magisches Quadrat von Agrippa (1486-1535). Er hat ein 4x4-Quadrat gefunden, das die Zahlen 1 bis 16 enthält.

1	14	4	10
12	8	16	5
13	6	9	1
3	7	15	11



Material: Kopiervorlage 4x4- / 5x5-Quadrat

Kontrolle: Hefte deine gefundenen Muster an die Wandtafel. Berechne vier Muster von anderen Kindern. Prüfe, ob diese zur magischen Summe führen.

B Magische Quadrate untersuchen

Auftrag: Vergleiche die Summe aller Zahlen im magischen Quadrat von Euler, Agrippa und Dürer mit der magischen Summe. Beschreibe den Zusammenhang schriftlich.

Der berühmte Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) hat sich mit magischen Quadraten beschäftigt.

Magisches Quadrat des berühmten Mathematikers Leonhard Euler (1707-1783). Er hat ein 4x4-Quadrat gefunden, das die Zahlen 1 bis 16 enthält.

1	11	8	16
14	4	15	10
13	12	5	9
6	7	3	17

Magisches Quadrat von Albrecht Dürer (1471-1521). Er hat ein 4x4-Quadrat gefunden, das die Zahlen 1 bis 16 enthält.

8	16	9	25
10	4	24	12
15	17	7	23
22	19	21	3

Magisches Quadrat von Agrippa (1486-1535). Er hat ein 4x4-Quadrat gefunden, das die Zahlen 1 bis 16 enthält.

1	14	4	10
12	8	16	5
13	6	9	1
3	7	15	11

Material: Arbeitsblatt mit den magischen Quadraten von Euler, Dürer und Agrippa.

Kontrolle: Kontrolle durch Lehrperson

C Magische Quadrate untersuchen

Auftrag: Beschreibe den Aufbau und die Struktur von magischen Quadraten. Untersuche Beispiele aus deinem Heft.

- Wo stehen ungerade Zahlen?
- Wo stehen gerade Zahlen?
- Welche Zahl steht in der Mitte? Vergleiche mit der magischen Summe. Was fällt dir auf?

Material: Eigene Beispiele von magischen Quadraten oder/und die magischen Quadrate von Euler, Dürer und Agrippa.

Kontrolle: Ergänze folgende Aussagen, so dass sie stimmen.

- Die magische Summe ist gerade, wenn...
- Die magische Summe ist ungerade, wenn...
- Die Summe aller Zahlen ist das fache der

Abbildung 7: Lernaufgaben A, B und C auf der Insel Magische Quadrate untersuchen für die Mittelstufe (Sandra Luginbühl, Simone Mast). (vgl. Schweizer Zahlenbuch 3, Wittmann & Müller 2008c:18; Schweizer Zahlenbuch 6, Affolter et al. 2010c:99)

2.6 Anforderungsmerkmale

Werden die Lernaufgaben der Unterrichtseinheit *Magische Quadrate* in Bezug auf die Anforderungsmerkmale untersucht, wird ersichtlich, dass sie viele der von Adamina (2010a:123) dargelegten Kriterien erfüllen:

Anspruch, Komplexität des Inhalts	Anspruch der Handlung, der Fähigkeit/Fertigkeit	Anspruch der Materialien
<i>Alltagsbezug-Sachbezug, erforderliches Vorwissen, Begriffe, Zusammenhänge</i>	<i>Anforderungen für Handlungsabläufe bei der Bearbeitung, Strukturierungsgrad der Handlungen, kognitive, kommunikative Ansprüche</i>	<i>Aufbau, Struktur, Passung (z.B. originale Objekte, Modelle, Texte); bei Texten z.B. inhaltlich Bekanntes und Unbekanntes; Struktur/Gliederung, innere Verbindung, Satzlänge</i>

(Adamina 2010a:123)

2.6.1 Anspruch Komplexität des Inhalts

Um die Lernenden anzuregen, sich vertieft mit dem Sachinhalt auseinanderzusetzen, werden sie aufgefordert, bei den Zahlenquadraten und Magischen Quadraten Veränderungen wahrzunehmen und diese zu beschreiben. Bei einer anderen Lernaufgabe sollen die Lernenden beispielsweise selber Veränderungen bei Magischen Quadraten vornehmen, um Zusammenhänge zu entdecken, zu beschreiben und zu begründen. Durch die Berücksichtigung zusätzlicher Bedingungen und die Erweiterung des Aufgabenformats werden weitere Variationsmöglichkeiten zur Entwicklung von Forscheraufträgen dargestellt. Die Komplexität der einzelnen Lernaufgaben lassen sich so mehr und mehr erschliessen.

2.6.2 Anspruch der Handlungen, der Fähigkeit/Fertigkeit

In Anlehnung an das Schweizer Zahlenbuch und in Absprache mit dem Fachexperten entscheiden die Lehrpersonen, bei den einzelnen Lernaufgaben das Anforderungsniveau mit Kokosnüssen zu kennzeichnen, um den Lernenden eine rasche Orientierung zu ermöglichen. Bei einer näheren Betrachtung lässt sich vermuten, dass auf diese Kennzeichnung verzichtet werden könnte. Der hohe Differenzierungsgrad der Lernaufgaben berücksichtigt unterschiedliche mathematische und sprachliche Kompetenzen der Lernenden. Fast jede Lernaufgabe kann mit unterschiedlich anspruchsvollen Operationen durchgeführt werden. Weiterführende Aufträge fordern die Lernenden heraus, ihre Lernstrategien zu erkennen und darüber mit anderen Lernenden auszutauschen. Der Schwierigkeitsgrad einer Lernaufgabe lässt sich somit den Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler problemlos anpassen. Oft ist die Komplexität einer Lernaufgabe erst bei genauerer Betrachtung erkennbar.

2.6.3 Anspruch der Materialien

Struktur als Orientierungshilfe

Für das Layout der Lernaufgaben entwickeln die Lehrpersonen eine Vorlage. Diese weist, wie die Abbildungen 4, 5, 6 und 7 zeigen, einen klaren Aufbau und eine übersichtliche Darstellung auf, die den Lernenden ein rasches Zurechtfinden ermöglicht.

Bei der Vorlage zu den Lernaufgaben wird oben links mit dem Buchstaben A, B, C oder D gekennzeichnet, um welche Lernaufgabe es sich handelt. In der Mitte folgt die Angabe zur mathematischen Kompetenz. Oben rechts wird mit der Anzahl Kokosnüssen der Schwierigkeitsgrad dargestellt. Untenstehend folgen die Angaben zum Auftrag. Wird Material zum Lösen der Lernaufgabe benötigt, so wird dies auf dem Auftragsblatt aufgeführt. Zum Schluss werden Möglichkeiten zur (Selbst-)Kontrolle formuliert (vgl. *Abbildung 8*).


A	Magische Quadrate bilden	
<p>Auftrag: 1.</p> <p>2.</p> <p>Material:</p> <p>Kontrolle:</p>		

Abbildung 8: Struktur für die Lernaufgaben auf der Unter- und Mittelstufe (Yvonne Liechti, Sandra Luginbühl, Simone Mast)

2.7 Differenzierungsmöglichkeiten

Differenzierung, Hilfestellungen, Bearbeitungszeit

- *Leistungsbezogene Differenzierung: z.B. unterschiedlicher Strukturierungsgrad der Aufgabe, Arbeitsschritte vorgegeben oder frei wählbar, Differenzierung im Materialangebot.*
 - *Interessen-/neigungsbezogene Differenzierung: Variation der Inhalte, Zugänge*
- (Adamina 2010a:123)

Wie die vorausgehenden Kapitel darlegen sind die Lernaufgaben auf den vier (Kompetenz-)Inseln auf hohem Niveau differenziert. Grundsätzlich sollen die Lernenden eine Lernaufgabe auswählen, die sie anspricht. Die Lehrpersonen wollen den Lernenden verschiedene Zugänge zum Erschliessen von Lerninhalten ermöglichen. Die Lernaufgaben sind so konzipiert, dass eine vertiefte Auseinandersetzung stattfinden kann.

2.7.1 Altersdurchmisches Lernen

An einer Planungssitzung besprechen die Lehrpersonen Möglichkeiten, wie das altersdurchmischte und kooperative Lernen unterstützt und gefördert werden kann. Sie sehen vor, dass sie die Lernenden jeweils nach einer selbstständigen Erarbeitungsphase zum Austauschen in Gruppen anregen, indem sie beispielweise diejenigen Lernenden, welche an derselben Lernaufgabe arbeiten auffordern, sich über ihre Ergebnisse und Lernerfahrungen auszutauschen. Durch die Interaktionen mit anderen Klassenkameradinnen und Klassenkameraden verschiedener Altersstufen soll bei den Lernenden die kognitive Entwicklung gefördert werden. Meinungen und Lösungsansätze werden ausgetauscht, die Lernenden versetzen sich in andere Denkprozesse. Sie diskutieren und kommen so zu neuen Erkenntnissen.

Die Lehrpersonen schätzen die Anforderungen der Klassenführung bei einem solchen Vorgehen als anspruchsvoll ein. Die fachliche Begleitung stellt eine grosse Herausforderung dar, wenn die Lernenden gleichzeitig an verschiedenen Aufgaben arbeiten. Die Lehrpersonen möchten ein angemessenes Vorgehen auswählen und Offenheit und Strukturiertheit in ein ausgewogenes Verhältnis stellen: Sie gehen davon aus, dass sich die Schülerinnen und Schüler zuerst in der neuen Lernumgebung, mit dem neuen Thema zurechtfinden müssen und am Anfang auf eine stärkere Führung angewiesen sind.

Der Fachexperte rät, den Austausch systematisch zu planen. Die Lehrpersonen wollen Formen auswählen, bei denen alle Schülerinnen und Schüler aktiv mitarbeiten können, z.B.:

- Aussagen/Behauptungen zu den einzelnen Lernaufgaben formulieren. Die Lernenden müssen diese überprüfen (Wahrheitsgehalt beweisen oder widerlegen, bspw.: Bei diesem magischen Quadrat sind nur gerade Summen möglich oder: Die kleinste magische Summe, die gebildet werden kann ist 60).
- Lernende halten ihre Erkenntnisse schriftlich fest. Die Erkenntnisse werden anschliessend im Plenum oder in Gruppen präsentiert, verglichen und besprochen.
- Lernaufgaben werden in Gruppen gelöst, Wissen wird gemeinsam aufgebaut. Das so gewonnene «Expertenwissen» kann an andere Lernende weitergegeben werden.

Die Lehrpersonen beschliessen, dass sie in der Unterrichtseinheit oft in jahrgangsübergreifenden jedoch leistungshomogenen Teams arbeiten wollen. Besprochen werden die kooperativen Lernformen Gruppenpuzzle, Placemat und Drei-Schritte-Interview (vgl. Green 2009). Der Fachexperte weist auf wichtige Punkte hin, die es beim Austauschen von Erfahrungen und Erkenntnissen zu beachten gilt: 1) Leitfragen bestimmen, 2) Methode festlegen und 3) Überlegen, wie die Ergebnisse am Schluss sichtbar gemacht werden. (Beobachtungsprotokoll 10.11.2010)

2.8 Möglichkeiten zur Selbst- und Fremdbeurteilung und zur Lerndiagnose

Möglichkeiten zur Selbst- und Fremdeinschätzung, Reflexion zum Lernen, Diagnose
Aufgaben zur Einschätzung und Beurteilung der eigenen Lernprozesse/ -ergebnisse
Aufgabenstellungen zur Selbstdiagnose (was nehme ich mir vor Ziele für nächste Lernanlässe)
(Adamina 2010a:123)

Aus Sicht des Fachexperten erfordert die Lernumgebung *Magische Quadrate* eine veränderte Beurteilungskultur. Er schlägt den Lehrpersonen vor, analog zu den Kompetenzbereichen (Inseln) entsprechende Beurteilungsbereiche zu entwerfen.

Die Lehrpersonen entscheiden, dass sich die Beurteilung der Lernumgebung aus einer Selbst- und Fremdbeurteilungen zusammensetzen soll. Ein Teil der Fremdbeurteilung erfolgt, indem die Lehrpersonen die Schülerinnen und Schüler während dem Unterricht beobachten. Auch wenn die Lernenden ihre Ergebnisse und Erkenntnisse miteinander diskutieren und austauschen, erhalten die Lehrpersonen einen Einblick in die Denk- und Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler. Vorgesehen ist, dass die Lernenden ihre Lösungswege auf den Auftragsblättern (Lernende der Unterstufe) oder im Mathematikheft (Lernende der Mittelstufe) beschreiben. Die Lehrpersonen wollen diese Einträge sichten und beurteilen. Dabei soll u.a. das Problemlöseverhalten der Lernenden fokussiert werden.

3 Vorbereitungsarbeiten

Für die Durchführung der Unterrichtseinheit planen die Lehrpersonen drei bis vier Wochen à zwei bis drei Lektionen ein. Jede Woche soll eine Insel abgeschlossen werden. Zur Visualisierung wird die Navigationskarte an der Wandtafel dargestellt. Die Darstellung verdeutlicht den Aufbau der Lernumgebung (Gliederung nach Kompetenzen, Schwierigkeitsstufen, etc.) und dient den Lernenden und der Lehrpersonen als Orientierungs- und Koordinationshilfe. Die Lehrpersonen bereiten für die Schülerinnen und Schüler magnetische Namensschilder (*Unterstufe*) und Fotos (*Mittelstufe*) vor. Im Unterricht werden die Lernenden diese zu der Lernaufgabe auf der Navigationskarte hängen, an der sie gerade arbeiten. Für die Lehrpersonen besteht dadurch die Möglichkeit, die Lernenden während der Arbeit in Gruppen einzuteilen. Auch die Schülerinnen und Schüler können sich so informieren, wer an welcher Lernaufgabe arbeitet. Spontan können sie sich für die Weiterarbeit oder für das Besprechen von Ergebnissen mit anderen zusammenschliessen (vgl. Abbildung 9).

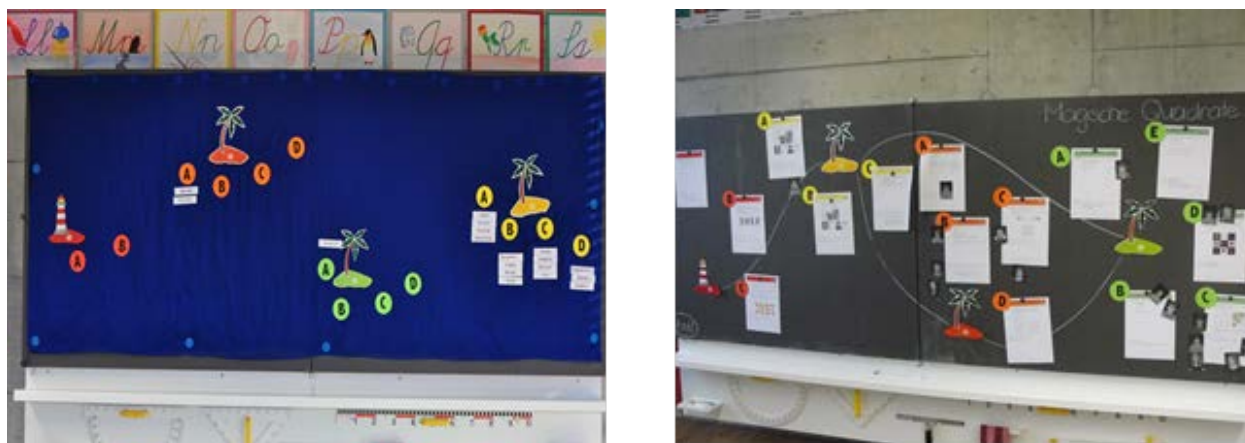


Abbildung 9: links: Navigationskarte mit Inseln (Kompetenzen) und Lernaufgaben Unterstufe: die Namensschilder sind bei den Lernaufgaben angeheftet. Rechts: Navigationskarte mit Inseln (Kompetenzen) und Lernaufgaben Mittelstufe: die Fotos der Schülerinnen und Schüler sind bei den Lernaufgaben mit einem Magnet befestigt.
(Fotos: Ursula Arnaldi und Yvonne Liechti 2.2.2011)

3.1 Unterrichtsverlauf

Die Lehrperson der *Unterstufe* plant, die Lernenden mit der Geschichte von Lo Shu (Wittmann & Müller 2007a:94ff., 2007b:58f., 2008a:229ff.) in das Thema *Magische Quadrate* einzuführen. Anschliessend wird sie zur Lernumgebung überleiten. Gemeinsam werden sich die Lernenden in einer ersten Sequenz mit der *Aufgabe A* auf der Insel *Magische Quadrate bilden* auseinandersetzen. Die Geschichte von Lo Shu und ihren Geschwistern soll sich als roter Faden durch die Unterrichtseinheit hindurch ziehen. Die Lehrperson möchte immer wieder einen Bezug zur Geschichte herstellen. Die Schildkröte Lo Shu soll die Lernenden motivieren und beim Lernen unterstützen.

Der Einstieg in die Unterrichtseinheit *Magische Quadrate* wird auf der *Mittelstufe* im Bildnerischen Gestalten (BG) vorbereitet. Die Lehrpersonen wollen mit den Lernenden Zahlenbilder von Eugen Jost² betrachten (vgl. *Abbildung 10*). Die Bilder sollen zum Denken und Experimentieren anregen. Die Lernenden versuchen, die dargestellten Symbole und Zahlen zu deuten, Regelmässigkeiten und Muster zu entdecken und zu berechnen.

² Bilder von Eugen Jost finden sich unter <http://www.lehrer-online.de/magisches-quadrat-digital.php> [15.5.2012]



Abbildung 10: Magisches Quadrat von Eugen Jost (www.lehrer-online.de/magisches-quadrat-digital.php) [15.5.2012]

Anschliessend wollen die Lehrpersonen anhand der Navigationskarte zur Lernumgebung überleiten. In der ersten Doppellektion sollen alle Lernenden mit der *Aufgabe A* auf der Insel *Magische Quadrate bilden* beginnen und 3x3, 4x4- und/oder 5x5- Quadrate bilden. Nach einem gemeinsamen Austausch im Plenum werden die Ergebnisse festgehalten. Anschliessend sollen den Schülerinnen und Schülern alle Lernaufgaben auf der Insel *Magische Quadrate bilden* zur Weiterarbeit zur Verfügung stehen.

Die folgenden Doppellektionen werden jeweils auf allen Stufen nach einem ähnlichen Schema verlaufen. Beim Unterrichtseinstieg im Plenum sollen Arbeitsschritte wiederholt, in neue Lerninhalte eingeführt, Operationen geübt und/oder gefestigt werden. Anschliessend folgt die Erarbeitungs- bzw. Übungsphase. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten selbstständig weiter. Für die Eigenaktivität der Lernenden soll ein hoher Anteil der zur Verfügung stehenden Zeit eingeräumt werden. Zwischendurch oder zum Abschluss einer Doppellektion findet ein Austausch in Gruppen oder im Plenum statt (Erfahrungsaustausch, Erkenntnisse festhalten). Die Lernaufgaben zu den vier Kompetenzbereichen sollen von den Schülerinnen und Schülern in verschiedenen Formen des sozialen Austauschs erarbeitet und vertieft werden. Es ist vorgesehen, in der zweiten Doppellektion auf die Insel *Magische Quadrate untersuchen* vorzurücken, auch wenn noch nicht alle Lernaufgaben auf der Insel *Magische Quadrate bilden* von den Lernenden vollständig gelöst sind. In den dritten und vierten Doppellektionen stehen den Lernenden alle Aufgaben auf den vier Inseln zur Bearbeitung offen. Es ist nicht von Bedeutung, wie viele Aufträge die Schülerinnen und Schüler lösen. Vielmehr erwarten die Lehrpersonen, dass sich die Lernenden beim Lösen der Lernaufgaben Zeit nehmen, weiter denken, ausprobieren und experimentieren. Die Lernenden sollen Zusammenhänge entdecken, erforschen, darlegen und begründen (vgl. Kapitel 2.2).

Die Lehrpersonen planen, die Arbeitsblätter (*Unterstufe*) und die Mathematikhefte (*Mittelstufe*) regelmässig einzusammeln, um so einen Überblick über den Lernstand der einzelnen Schülerinnen und Schüler zu gewinnen.

3.2 Räumlichkeiten

Die Durchführung der Unterrichtseinheit findet in allen drei Klassen im Klassenzimmer statt. In zwei Klassen sind die Tische zu Beginn des Projektes zu Pultinseln (vgl. *Abbildung 11*) angeordnet, was den Austausch in Gruppen fördert. Im Klassenzimmer der dritten Klasse sind die Tische in Reihen hintereinander angeordnet. Die Lernenden sitzen jahrgangsdurchmischt. Angrenzend an die Klassenzimmer befindet sich je ein Gruppenraum.



Abbildung 11: Klassenzimmer der Mittelstufe, Pultinseln; Foto: Sandra Luginbühl (4.2.2011)

3.3 Lernmaterialien

3.3.1 Selbstständiges Arbeiten auf der Unterstufe ermöglichen

Für jede Lernaufgabe bereitet die Lehrperson der *Unterstufe* ein separates Arbeitsblatt vor. Auf diesem Arbeitsblatt wird die Lernaufgabe (Auftrag) beschrieben. Darunter lösen die Lernenden die Aufgabe und stellen ihre Ergebnisse dar. Die bearbeiteten Lernaufgaben werden im persönlichen Mäppchen gesammelt (vgl. Abbildung 12).



Abbildung 12: Arbeitsblätter der Lernaufgaben für die Unterstufe. Foto: Corinne Gonseth Neuenschwander (9.2.2011)

3.3.2 Selbstständiges Arbeiten auf der Mittelstufe ermöglichen

Auf der *Mittelstufe* arbeiten die Lernenden mit einem Mathematikheft. Zur Heftführung erhalten sie eine Anleitung. Auf der ersten Seite kleben die Schülerinnen die Anleitung und eine Kopie der Navigationskarte ein. Während der Unterrichtseinheit zeichnen die Schülerinnen und Schüler auf, welche Insel sie besuchen und kreuzen an, welche Lernaufgaben sie bearbeitet haben. Dadurch erhält die Lehrperson einen Überblick, auf welcher (Kompetenz-)Insel und an welcher Lernaufgabe die Schülerinnen und Schüler gearbeitet haben. Die Lernaufgaben werden verkleinert und kopiert bereitgestellt. Diese werden von den Lernenden

fortlaufend ins Mathematikheft eingeklebt. Darunter stellen sie ihre Erarbeitungsschritte dar. Vermutungen werden formuliert und begründet (vgl. Abbildung 13).

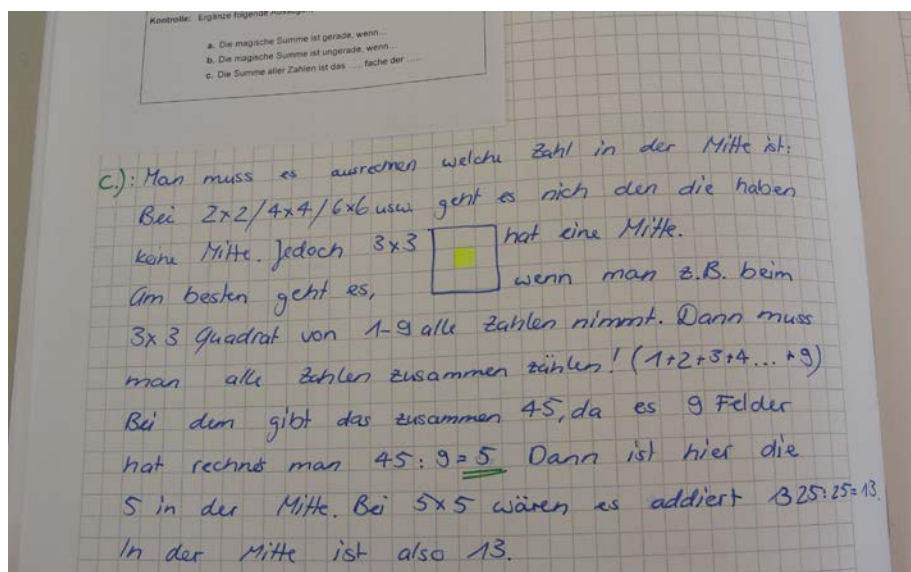


Abbildung 13: Erarbeitungsschritte aus einem Mathematikheft der Schülerin J. (6. Klasse), Mittelstufe. Am oberen Bildrand sieht man die ins Heft geklebte Kopie der Lernaufgabe. (Foto: Ursula Arnaldi 4.2.2011)

3.4 Rückmeldungen zur Unterrichtseinheit einplanen

Zum Abschluss der Unterrichtseinheit wollen die Lehrpersonen mit den Lernenden auf der *Unter-* und *Mittelstufe* eine Auswertung durchführen. Die Lernenden sollen sich mit dem eigenen Lernen auseinandersetzen und schriftlich festhalten, was sie erfahren und gelernt haben. Sie sollen sich auch darüber äussern, was ihnen an der Lernumgebung besonders gefallen / nicht entsprochen hat. Die Lehrpersonen wollen damit der freien, konstruktiven Kritik Raum geben. Die Rückmeldungen der Lernenden sollen auch in die Weiterentwicklung der Unterrichtseinheit einfließen.

4 Die Durchführung

Anhand von Unterrichtsbeispielen aus der *Unter-* oder *Mittelstufe* wird aufgezeigt, wie die Lehrpersonen die Lernenden innerhalb der vorbereiteten Lernumgebung individuell begleiten und unterstützen. Für die Analyse der Durchführung wird im Folgenden der Fokus auf die Begleitung des Lernens ausgerichtet. Die Unterrichtsbeobachtungen zeigen auf, wie die Lehrpersonen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern Lösungswege suchen und besprechen, Ergebnisse diskutieren und/oder überarbeiten. Die Lehrpersonen möchten im Unterricht bewusst vermehrt die Rolle einer Lernbegleiterin, Lernberaterin übernehmen und die Lernenden anleiten, sich auch gegenseitig beim Lernen zu unterstützen.

4.1 Modelle

4.1.1 Vorzeigen und schrittweise anleiten auf der Unterstufe

Wie die folgende Unterrichtsbeobachtung zeigt, werden die Lernenden wie geplant auf der *Unterstufe* durch das Erzählen der Geschichte von Lo Shu (Schweizer Zahlenbuch 1 2007a:94ff., 2007b:58f., 2008a:229ff.) schrittweise an das Bilden von *Magischen Quadraten* herangeführt. Durch die Erzählung und die bildliche Darstellung an der Wandtafel (vgl. Abbildung 14) werden die Schülerinnen und Schüler in der Einführung kognitiv aktiviert. Sie denken mit und äussern ihre Vermutungen spontan.



Abbildung 14: Herleiten magische Quadrate auf der Unterstufe (Foto: Yvonne Liechti 2.2.2011)

Die LP erzählt: «Lange haben die Weisen über die rätselhaften Zahlen auf dem Panzer der Schildkröte nachgedacht. Einer der Weisen hat erst nach drei Tagen herausgefunden, dass es Zahlen sind, die auf eine sonderbare Weise angeordnet sind. Könnt ihr etwas entdecken?» C. (3. Klasse): «Ja, es gibt immer die gleiche Summe.» LP: «Genau.» S. (2. Klasse): «Es hat verschiedene Zahlen.» LP: «Ja, schaut genau hin, welche Zahlen könnt ihr entdecken?» R (3. Klasse): «Es hat eine Zahlenreihenfolge von 1 bis 9.» - «Gut beobachtet», lobt die Lehrperson und erklärt: «Jede Zahl kommt nur einmal vor, das ist magisch, das ist der Unterschied zu einem einfachen Rechenquadrat.» (Beobachtungsprotokoll 2.2.2011)

Anschliessend an die protokollierte Sequenz werden die Regeln der *Magischen Quadrate* besprochen und an der Wandtafel festgehalten.

Nach der Einführung ins Thema beginnen die Lernenden der *Unterstufe* mit dem Erfinden und Bilden von ersten 3x3 Quadraten. Die Lehrperson beobachtet und erinnert einzelne Lernende immer wieder an die an der Wandtafel festgehaltenen Regeln. Nach einer gewissen Zeit können die Lernenden individuell zur *Lernaufgabe B* wechseln. Das Beispiel eines Schülers zeigt auf, wie er die Aufgabe gelöst und welche Erkenntnisse er daraus gezogen hat (vgl. *Abbildung 15*).

Einstieg																													
B	Magische Zahlenquadrate oder nicht?																												
Auftrag: 1. Welche Zahlenquadrate sind magisch? Welche sind es nicht? 2. Übermale nur die magischen Quadrate mit Gelb.																													
15 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>4</td><td>9</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>8</td><td>1</td><td>6</td></tr> </table>	4	9	2	3	5	7	8	1	6	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>7</td><td>12</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>4</td><td>9</td></tr> </table>	7	12	5	6	8	10	11	4	9	24 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>1</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td><td>3</td></tr> </table>	1	4	1	2	2	2	3	0	3
4	9	2																											
3	5	7																											
8	1	6																											
7	12	5																											
6	8	10																											
11	4	9																											
1	4	1																											
2	2	2																											
3	0	3																											
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>5</td><td>12</td><td>7</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>6</td></tr> <tr><td>9</td><td>4</td><td>11</td></tr> </table>	5	12	7	10	8	6	9	4	11	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>8</td><td>18</td><td>10</td></tr> <tr><td>6</td><td>10</td><td>14</td></tr> <tr><td>16</td><td>3</td><td>12</td></tr> </table>	8	18	10	6	10	14	16	3	12	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr> </table>	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	12	7																											
10	8	6																											
9	4	11																											
8	18	10																											
6	10	14																											
16	3	12																											
5	5	5																											
5	5	5																											
5	5	5																											
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr> </table>	5	2	1	0	2	6	3	4	1	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>13</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>6</td><td>10</td><td>14</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>7</td></tr> </table>	13	8	9	6	10	14	11	12	7	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>30</td><td>18</td><td>12</td></tr> <tr><td>18</td><td>12</td><td>30</td></tr> <tr><td>12</td><td>30</td><td>18</td></tr> </table>	30	18	12	18	12	30	12	30	18
5	2	1																											
0	2	6																											
3	4	1																											
13	8	9																											
6	10	14																											
11	12	7																											
30	18	12																											
18	12	30																											
12	30	18																											
Woran erkennst Du die magischen Quadrate? Jede Zahl nur 1x Immer gleich viel																													

Abbildung 15: Beispiel Arbeitsblatt eines Schülers (2. Klasse) auf der Unterstufe. Auftrag B, Magische Zahlenquadrate oder nicht?

Wie das Beispiel (vgl. *Abbildung 15*) zeigt, hat der Schüler die ihm gestellte Aufgabe korrekt gelöst. In der ersten Zeile berechnet er die Summen der Spalten und Zeilen der drei ersten Quadrate. Zahlenquadrate, die sich als nicht magisch erweisen, werden durchgestrichen. Zudem hat er die zwei identischen Quadrate mit einem Pfeil gekennzeichnet. Seine Erkenntnisse fasst er zum Schluss stichwortartig zusammen.

4.1.2 Vorzeigen und schrittweise anleiten auf der Mittelstufe

Nachdem sich die Lernenden auf der *Mittelstufe* im Bildnerischen Gestalten (BG) mit den Zahlenbildern von Eugen Jost³ auseinandergesetzt haben, führt sie die Lehrperson mit einem ersten Arbeitsblatt schrittweise in das Thema *Magische Quadrate* ein (vgl. *Abbildung 16*). Die Lernenden lesen gemeinsam den Text und lösen anschliessend selbstständig die beiden Lernaufgaben. Die Ergebnisse werden im Plenum zusammen getragen. Wie das Beobachtungsprotokoll zeigt, gelingt es der Lehrperson, die Lernenden durch Fragen zum Denken und Überprüfen von Lösungen anzuregen:

LP: «Welche Zahlen habt ihr für das Bilden der beiden Quadrate gebraucht?» D. (6. Klasse): «Die Zahlen 1 bis 9.» Eine andere Schülerin (5. Klasse) ergänzt: «Waagrecht und senkrecht gibt es immer 15.» - «Gut», lobt die Lehrperson, «in jeder Spalte, jeder Zeile und in der Diagonale muss es 15 geben. Stimmt das auch bei den anderen?» (Beobachtungsprotokoll 4.2.2011)

Magische Quadrate

Magische Quadrate haben uralte Wurzeln. Nach einer chinesischen Legende tauchte eines Tages aus dem Meer eine Schildkröte auf, die auf ihrem Panzer seltsame Zeichen trug. Die Schildkröte hieß Lo-Shu. Gelehrte am Hof des Kaisers entschlüsselten die Zeichen und stellten sie mit Hilfe von Knotenschnüren dar. Es handelt sich dabei um ein Zahlenschema aus drei Zeilen und drei Spalten. Für die ungeraden Zahlen wurden weiße Punkte (Yang), für die geraden Zahlen schwarze Punkte (Yin) verwendet.

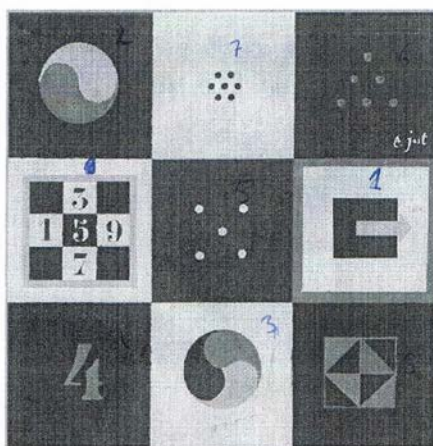
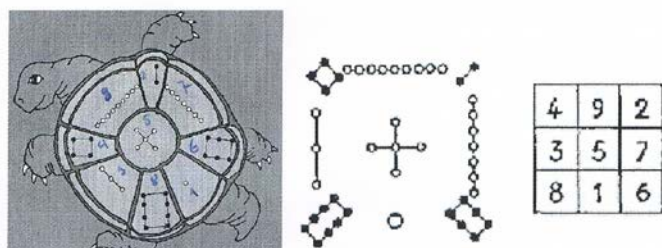


Abbildung 16: Arbeitsblatt zur Einführung in das Thema *Magische Quadrate* auf der Mittelstufe (vgl. *Schweizer Zahlenbuch 5*, Affolter et al. 2009b: 80)

³ Bilder von Eugen Jost finden sich unter <http://www.lehrer-online.de/magisches-quadrat-digital.php> [15.5.2012]

Anschliessend erläutert die Lehrperson mit Hilfe der Navigationskarte die Lernumgebung und lässt die Lernenden an der *Aufgabe A* auf der *roten Insel* arbeiten. Die folgenden zwei Beispiele aus einem Mathematikheft zeigen auf, dass eine Schülerin (5. Klasse) das erworbene Wissen bei zwei 3x3 Quadraten und einem 4x4 Quadrat korrekt anwenden kann. Ein anderer Schüler (5. Klasse) kann das erworbene Wissen nur beim ersten 3x3 Quadrat anwenden. Anschliessend füllt er die weiteren 3x3, 4x4 und 5x5 Quadrate mit eher zufällig gewählten Zahlen aus (vgl. *Abbildung 17*).

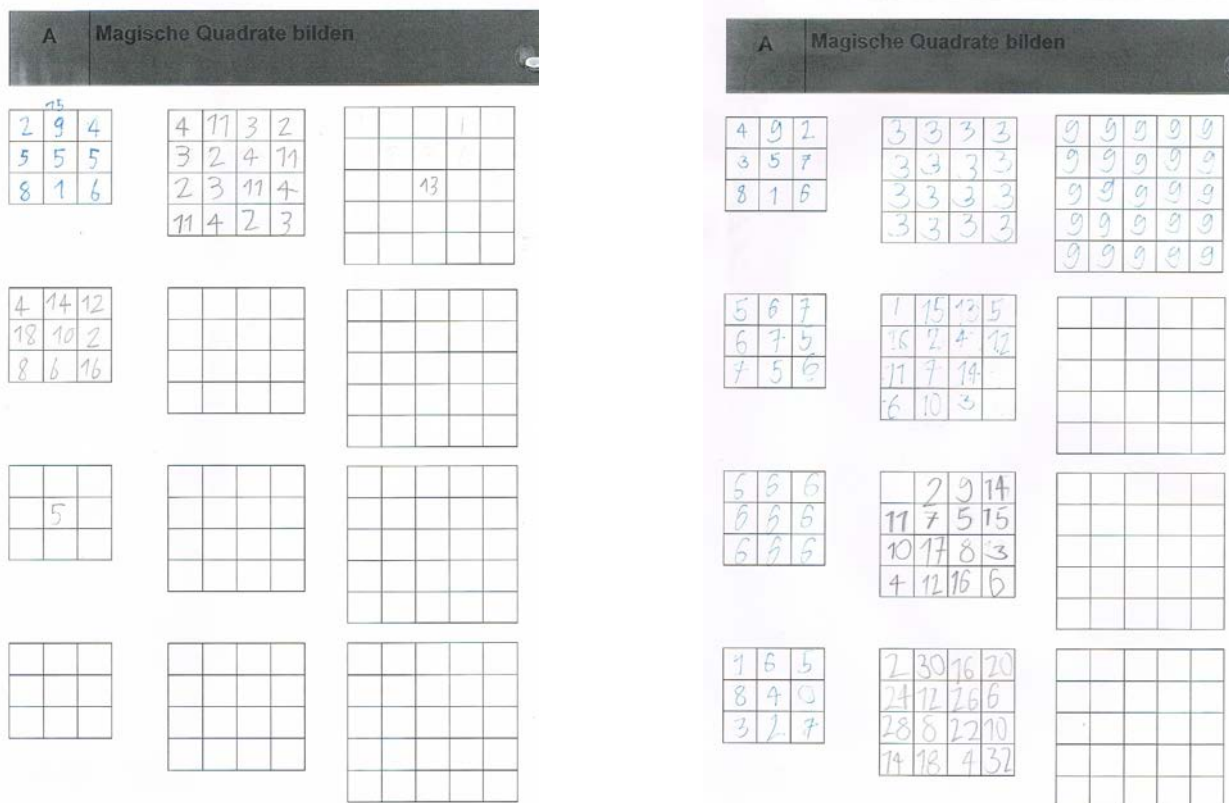


Abbildung 17: Lernaufgabe A, Magische Quadrate bilden. Zwei Beispiele von individuellen Lösungen aus dem Arbeitsheft von Lernenden (5. Klasse)

4.2 Dialog, Austausch

4.2.1 Lernende beobachten und unterstützen

Die Unterrichtsbeobachtungen zeigen, dass die Lehrpersonen der *Mittelstufe* einzelne Lernende bei der Wahl der Lernaufgabe beobachten und unterstützen und sie so, aufgrund der individuellen Lernvoraussetzungen, gezielt fördern. Von anderen Lernenden werden bessere Lernergebnisse gefordert.

LP: «Der Posten A, auf der Insel Magische Quadrate erfinden, wäre noch tricky für dich. Nimm ihn. Du hast erblickt, wie es geht. Mach jetzt diesen Posten.» Der Junge (4. Klasse) nimmt die Lernaufgabe und geht an seinen Platz. [...] (Beobachtungsprotokoll 11.2.2011)

LP: «Also D. (6. Klasse), ich würde sagen, das reicht jetzt. Jetzt kannst du noch eine Aufgabe machen von der Insel Magische Quadrate untersuchen. Einfach, damit du weiterkommst.» [...] (Beobachtungsprotokoll 4.2.2011)

S. (5. Klasse) nimmt ein Bild von Eugen Jost. LP: «Nein, S., nimm nicht dieses Bild, das haben wir ja schon zusammen besprochen. Schau, nimm doch das hier. Da gibt es auch einfachere und schwierigere Aufgaben zum Lösen, du kannst selber wählen.» (Beobachtungsprotokoll 11.2.2011)

Bei der individuellen Unterstützung achten die Lehrpersonen darauf, dass die Schülerinnen und Schüler die Lösung möglichst selbst herausfinden. Die folgende Unterrichtsbeobachtung zeigt auf, wie die Lehrperson eine Schülerin zum eigenständigen Denken und zum genauen Formulieren von Fragen anregt.

L. (4. Klasse) arbeitet an einem magischen 3x3 Quadrat. Sie braucht Hilfe, hält die Hand hoch und wartet, bis die Lehrperson Zeit hat. «Ich komme nicht draus», sagt sie. «Was ist deine Frage?», antwortet die Lehrperson. L. kann die Frage nicht formulieren. «Überlege dir die Frage, die du stellen willst», sagt die Lehrperson. Etwas später hält L. die Hand wieder hoch und fragt: «Muss ich da eine Zahl einsetzen?» «Hast du gelesen, was die Aufgabe ist?» fragt die Lehrperson. «Ja», sagt L. «Dann erkläre mir, was von dir verlangt wird.» L. kann den Auftrag nicht erläutern. «Lies die Aufgabe nochmals», sagt die Lehrperson. L. liest und erklärt: «In jeder Zeile und in jeder Spalte muss es 15 geben, in der Mitte steht die 5.» - «Genau», lobt die Lehrperson, «versuche nun das magische Quadrat zu lösen.» (Beobachtungsprotokoll 4.2.2011)

In einer späteren Unterrichtslektion motiviert die Lehrperson dieselbe Schülerin, ein 4x4 Quadrat zu lösen. Auch die Lehrperson auf der *Unterstufe* motiviert und ermutigt die Lernenden dranzubleiben und auch bei schwierigen Aufgaben nicht aufzugeben. LP: «Auch wenn es bei einem Auftrag nicht so gut geht, nicht einfach wechseln, versucht ein bisschen.» (Beobachtungsprotokoll 11.2.2011)

4.2.2 Ideen gemeinsam entwickeln

Wie vorgesehen werden die Lernenden durch die Lehrpersonen sowohl auf der *Unter-* als auch auf der *Mittelstufe* mit unterschiedlichen Methoden zum kooperativen Lernen angeleitet (vgl. Kapitel 2.7.1). Oft arbeiten die Lernenden in Gruppen, entwickeln Ideen gemeinsam und finden im Dialog zu Ergebnissen. Die Lehrpersonen fordern die Lernenden auf, sich ihre Überlegungen und Vorgehensweisen zu präsentieren. Dadurch können die Lernenden Einblick in andere Verfahren und Lösungsstrategien nehmen.

LP (*Mittelstufe*) wendet sich an zwei Lernende: «Ihr habt jetzt beide denselben Posten gemacht. Tauscht jetzt zusammen aus. Was habt ihr herausgefunden? Vielleicht habt ihr ja unterschiedliche Lösungen gefunden.» Die zwei Knaben suchen sich einen passenden Platz im Klassenzimmer (vgl. Abbildung 18) und arbeiten gemeinsam an derselben Lernaufgabe weiter. (Beobachtungsprotokoll 7.2.2011)



Abbildung 18: Lernende arbeiten gemeinsam an derselben Lernaufgabe (Foto: Ursula Arnaldi 7.2.2011)

Ein weiterer Austausch in Gruppen wird in der *Mittelstufe* anhand der gelösten Hausaufgaben initiiert. Immer diejenigen Lernenden, welche dieselbe Aufgabe zu Hause gelöst haben, setzen sich in der folgenden Unterrichtslektion in Gruppen zusammen. Die Lehrperson leitet zum Austausch an:

LP: «Heute wollen wir zuerst schauen und austauschen, was ihr erarbeitet habt. Wir wollen einander Tipps geben. Also, zeigt einander auf, wie ihr die Aufgabe gelöst habt, was ihr herausgefunden habt, wie ihr vorgegangen seid.» (Beobachtungsprotokoll 4.2.2011)

Im Plenum werden Lösungswege besprochen und diskutiert. Wichtige Erkenntnisse oder Vorgehensweisen halten die Lehrpersonen an der Wandtafel fest. Bei der Weiterarbeit können die Lernenden auf diese Erkenntnisse zurückgreifen.

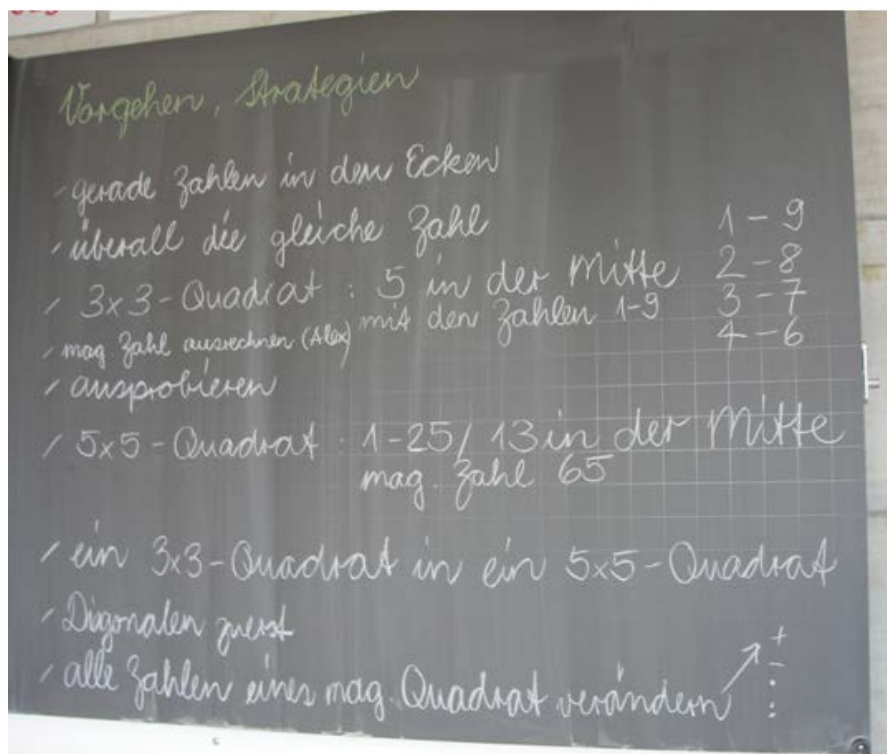


Abbildung 19: Erkenntnisse von Schülerinnen und Schülern der Mittelstufe werden an der Wandtafel festgehalten
(Foto: Ursula Arnaldi 4.2.2011)

In jeder Lektion erhalten die Lernenden der *Mittelstufe* jeweils die Gelegenheit, spielerisch mit verschiedenen Sets aus Moosgummi⁴ magische Quadrate zu legen und das Gelernte anzuwenden und zu vertiefen. Das folgende Beobachtungsprotokoll zeigt auf, wie sich Lernende gegenseitig unterstützen und gemeinsam nach Lösungswegen suchen:

Vier Lernende werden aufgefordert, hinten im Klassenzimmer ein Zahlenquadrat mit farbigem Moosgummi zu legen. Sie nehmen das Material hervor und beginnen zu legen. Ein 3x3 Quadrat gelingt, sie legen auch ein 4x4 Quadrat ohne Probleme. Nun sind sie an einem 5x5 Quadrat. Es ist schwierig, sie knobeln. Nun übernimmt J. die Führung und sagt, wo welche Farbe hingelegt werden soll. L. und G. legen die Quadrate nach seiner Anweisung hin. B. schaut zu und korrigiert. J. verfolgt aufmerksam, was B. macht und sagt: «Das geht nicht, schau, hier musst du gelb hinlegen, weil gelb hier schon vorhanden ist.» Sie probeln und suchen immer wieder nach neuen Strategien. (Beobachtungsprotokoll 7.2.2011)

4.3 Unterstützung und Ansporn

4.3.1 Ermutigen zum Dranbleiben

Wie die folgenden Unterrichtsbeispiele aufzeigen, werden die Zahlenbilder von Eugen Jost bei verschiedenen Lernaufgaben immer wieder eingesetzt. Die Bilder haben eine motivierende Wirkung. Im Unterricht zeigt es sich, dass die Lernenden gerne auf diese symbolhaften, bildlich dargestellten Lernaufgaben zurückgreifen.

Bei der Aufgabe D (Insel Magische Quadrate erfinden) müssen weitere (anspruchsvollere) Zahlen und Symbole übersetzt werden. Die Lehrpersonen laminieren dazu die Bilder. Mit wasserlöslichen Filzstiften können die Lernenden die Resultate auf den Bildern festhalten und wieder auslöschen (vgl. Abbildung 20). Die Lehrperson leitet und spornet die Lernenden an:

«Bei der Insel Magische Quadrate erfinden hat es weitere Bilder von Eugen Jost. Versucht sie zu berechnen. Ihr merkt dann, dass es eine ziemliche Herausforderung ist!»
(Beobachtungsprotokoll 11.2.2011)

⁴ Moosgummi ist ein elastischer Schaumstoff. «Häufig wird das Material mit dem geschlossenzelligen Zellkautschuk oder auch mit EVA-Schaumstoffen, im Bastelbereich fälschlicherweise als Moosgummi bezeichnet, verwechselt.» (<http://de.wikipedia.org/wiki/Moosgummi>) [20.8.2012].

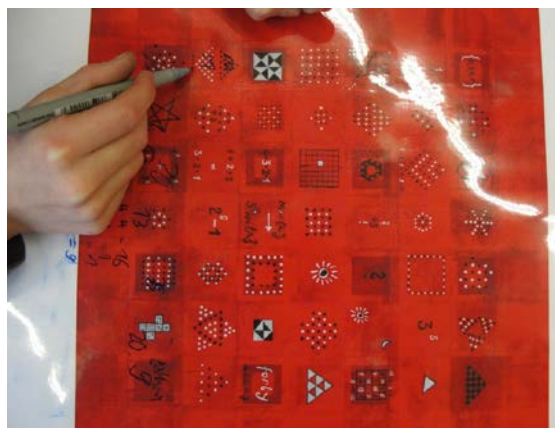
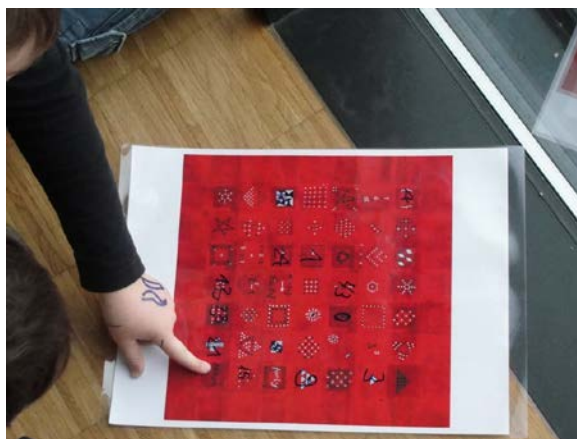


Abbildung 20: Experimentieren mit den Bildern von Eugen Jost (Fotos: Ursula Arnaldi 11.2.2011)

Bei der Lernaufgabe C (Insel *Magische Quadrate erfinden*) experimentieren die Lernenden mit dem Darstellen von Zahlen und erfinden, in Anlehnung an die Bilder von Eugen Jost, eigene *magische Quadrate* und stellen diese bildhaft dar (vgl. Abbildung 21).

C Magische Quadrate erfinden

Magisches Quadrat bestehend aus Zahlen:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Magisches Quadrat bildlich dargestellt:

C Magische Quadrate erfinden

Magisches Quadrat bestehend aus Zahlen:

Magisches Quadrat bildlich dargestellt:

Abbildung 21: Magische Quadrate 3x3 bildlich darstellen nach der Idee von Eugen Jost. Linke Abbildung Schülerin 6. Klasse, rechte Abbildung Schüler 4. Klasse.

4.3.2 Anregen, über das Lernen nachzudenken

Wie geplant halten die Lernenden ihre Erkenntnisse auf den Arbeitsblättern (*Unterstufe*) oder im Mathematikheft (*Mittelstufe*) fest. Diese werden regelmässig von den Lehrpersonen angeschaut. In der folgenden Unterrichtslektion bilden die so gewonnen Einblicke in die Lernwege der Schülerinnen und Schüler oft den Ausgangspunkt für Besprechungen. Besprechungen finden sowohl mit einzelnen Lernenden, in Gruppen oder im Plenum statt. Die Lehrpersonen regen die Lernenden im Gespräch zur Reflexion an, wiederholen und vertiefen fachliches Wissen und bereiten so eine Basis für die Weiterarbeit auf der nächsten Insel vor. Im Folgenden wird das Vorgehen auf der *Unterstufe* und *Mittelstufe* beschrieben.

Lernende auf der Unterstufe anregen, über das Lernen nachzudenken

Die Lehrperson beobachtet die Lernenden und bildet während dem Arbeiten Lerngruppen. Die Lehrperson stellt fest, dass einzelne Lernende die Gesprächsführung übernehmen. Sie fragen, indem sie nachfragen und dadurch andere Lernende beim Erklären eines Sachinhaltes unterstützen.

Jeweils nach dem Erarbeiten einer Kompetenzinsel möchte die Lehrperson die Lernenden zusätzlich anleiten, in Gruppen über die Lernerfahrungen auszutauschen. Die auf dem Blatt formulierten Fragen sollen die Lernenden zur Reflexion anregen. Dieses Vorhaben erweist sich für die Schülerinnen und Schüler auf der *Unterstufe* als zu anspruchsvoll. Es wird deutlich, dass das Nachdenken über das Lernen metakognitive Fähigkeiten voraussetzt und hohe Anforderungen an die Lernenden stellt. Metakognitive Fähigkeiten müssen schrittweise aufgebaut und im Unterricht immer wieder geübt werden (vgl. *Abbildung 22*).

D Zahlenfolgen

Ich/ Wir haben B gelöst:

1. Tauscht eure Arbeiten aus.
2. Findet heraus, was euer Partner/ eure Partnerin gerechnet hat und was er/ sie dabei herausgefunden hat. Ihr dürft auch Fragen stellen!
3. Erklärt euch gegenseitig, was ihr von der Arbeit des Anderen verstanden habt: „Also, du bist so vorgegangen... und dabei hast du folgendes herausgefunden..... Stimmt das?“
4. Schreibt auf, wie gut das gegenseitige Herausfinden geklappt hat:

Wir haben immer die gleiche Summe.
Mann kann es vertopeln

Abbildung 22: Schriftliche Anleitung für das Nachdenken über das Lernen (Auswertung) auf der Unterstufe

Lernende auf der Mittelstufe anregen, über das Lernen nachzudenken

Beim folgenden Unterrichtsbeispiel setzt sich die Lehrperson mit vier Lernenden an einen Tisch. Gegenseitig erklären sich die Schülerinnen und Schüler, wie sie magische Quadrate verändert haben.

Eine Schülerin (E., 4. Klasse) erzählt: «Bei diesem Quadrat habe ich immer plus 10 minus 2 gerechnet. Das Ergebnis habe ich dann aufgeschrieben, das habe ich mit allen Zahlen so gemacht.» Die LP fragt nach: «Dann hast du also eigentlich plus 8 gerechnet?» E: «Ja, aber plus 10 minus 2 ist für mich einfacher!» (Beobachtungsprotokoll 4.2.2011)

Das Nachfragen der Lehrperson «Dann hast du also eigentlich plus 8 gerechnet?» fordert die Schülerin auf, nochmals über ihr Vorgehen nachzudenken. Die Antwort von E: «Ja, aber plus 10 minus 2 ist für mich einfacher!», zeigt auf, dass sie gelernte Operationstechniken im Unterricht erfolgreich einsetzen und reflektieren kann. Gleichzeitig gewinnt die Lehrperson Einblick in ihre Rechnungsstrategie. *Abbildung 23* gibt Einblick, wie ein Schüler seinen Lösungsweg beschreibt. Das Dokument zeigt auf, wie systematisch er beim Lösen der Aufgaben vorgegangen ist. Es verdeutlicht, welche Strategien er verwendet und auf welchem Niveau er gearbeitet hat.

B Magische Quadrate bilden

Auftrag: Nimm aus einem Jasskartenspiel von jeder Farbe die vier Karten: Ass, König, Ober und Unter.

Lege die Karten so in ein 4x4-Quadrat, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen jede Farbe und jeder Wert genau einmal vorkommt.

Suche weitere Möglichkeiten. Übertrage deine Lösungen ins Heft (Ass = A, König = K, Ober = O, Unter = U).



Material: Jasskartenvorlage

Kontrolle: Zeige deine Lösungen einer Mitschülerin / einem Mitschüler und lasse sie prüfen.

Ich habe zuerst
die Zeilen angeschaut,
dann senkrecht, und
zu letzt diagonal
dann musste ich
aber gut aufpassen
weil noch ein
paar falsch waren,
ich musste sie
fertigtauschen und
es hat geklappt.
Ich habe auch eins
mit Eva gemacht.

Abbildung 23: Beispiel für einen schriftlichen Lösungsweg im Mathematikheft eines Schülers (4. Klasse) (vgl. Schweizer Zahlenbuch 6, Affolter et al. 2010c:98).

Ein weiteres Beispiel zeigt auf, wie vertieft sich ein Schüler (6. Klasse) mit einer Problemstellung auseinander setzt. Er hält in seinem Mathematikheft fest, wie sich die magische Zahl eines 4x4 oder 5x5 Quadrates finden lässt. Seine Beobachtungen und Erkenntnisse dokumentiert er anschaulich und nachvollziehbar. Das Berechnen der magischen Zahl stellt er in einem mathematischen Term dar (vgl. Abbildung 24).

Magische Zahlen Finden

1. Schauen was es für ein Quadrat ist
 - Rechnen wie viele Felder es hat.
 - 2x2 Quadrate gehen nicht.

Beispiel:

4	4
4	4

 $4 \cdot 4 = 16$

5	5
5	5

 $5 \cdot 5 = 25$

2. Durchschnitt berechnen
 - Die Anzahl Felder +1 rechnen und halbieren

Beispiel:

4+1=16	5+1=25
16:2=8	25:2=12,5
17:2=8,5	26:2=13

(Durchschnitt wenn möglich in die Mitte)

3. Zahlenpaare bilden
 - Durchschnitt $\cdot 2$ rechnen und Zahlen die zusammen Durchschnitt $\cdot 2$ ergeben bilden

Beispiel:

4+4=16	5+5=25
16+1=17	25+1=26
17:2=8,5	26:2=13
8,5+2=10,5	13+2=15
1+16	1+25
2+15	2+24
...	...
7+10	...
8+9	11+14
	14+11

$X \cdot X = (X \cdot X) + 1 = (X \cdot X + 1) \cdot (X:2) = \text{Magische Zahl}$

Beispiel:

$5 \cdot 5 = 25 + 1 = 26 \cdot (5:2) = 65$

$4 \cdot 4 = 16 + 1 = 17 \cdot (4:2) = 34$

$X \cdot X = (X \cdot X) + 1 = \text{Zahlenpaar zusammen setzen}$

Beispiel:

$5 \cdot 5 = 25 + 1 = 26 (1+25 \dots 12+14)$

$4 \cdot 4 = 16 + 1 = 17 (1+16 \dots 8+9)$

4. Ausprobieren
 - Bei ungeraden Anzahl Felder immer die Zahlenpaare gegenüber schreiben

Zahlenpaar

Durchschnitt (13)

gegenüberliegende Zahlenpaare

Durchschnitt

Abbildung 24: Schritte zur Lösung der Aufgabenstellung Magische Zahlen finden (Schüler 6. Klasse)

Dieses Beispiel verdeutlicht, wie eine Lernaufgabe auch leistungsstarke Lernende herausfordert. Erwähnt werden muss, dass sich die Lernenden der Mittelstufe bereits mehrmals im vorangehenden Unterricht in der Reflexion und im Formulieren von Metakognition geübt haben.

4.4 Lerngerüste

4.4.1 Strukturhilfen

Die von den Lehrpersonen sorgfältig strukturierte Lernumgebung kann als übergeordnetes Lerngerüst betrachtet werden. Die Darstellung mit der Navigationskarte bietet den Lernenden einen guten Überblick und dient als Orientierungshilfe. Auf den vier Inseln werden vier unterschiedliche mathematische Kompetenzen gefördert. Auf jeder Insel werden Lernaufgaben angeboten, die von allen Lernenden auf unterschiedlichem Anspruchsniveau gelöst werden können. Die einzelnen Problemstellungen lassen unterschiedliche Vertiefungen zu, wie die Beispiele in den Abbildungen 23 und 24 zeigen.

5 Die Lernenden halten Rückschau

Zum Abschluss der Unterrichtseinheit erhalten die Lernenden der *Unterstufe* je ein rotes und ein grünes Blatt Papier und schreiben auf, was ihnen an der Lernumgebung *Magische Quadrate* gefallen / nicht gefallen hat. Das grüne Blatt wird an die linke Seite der Tafel geheftet, das rote an die rechte Seite. Im Klassengespräch tauschen die Lernenden aus, was sie aufgeschrieben haben (vgl. Abbildung 25).

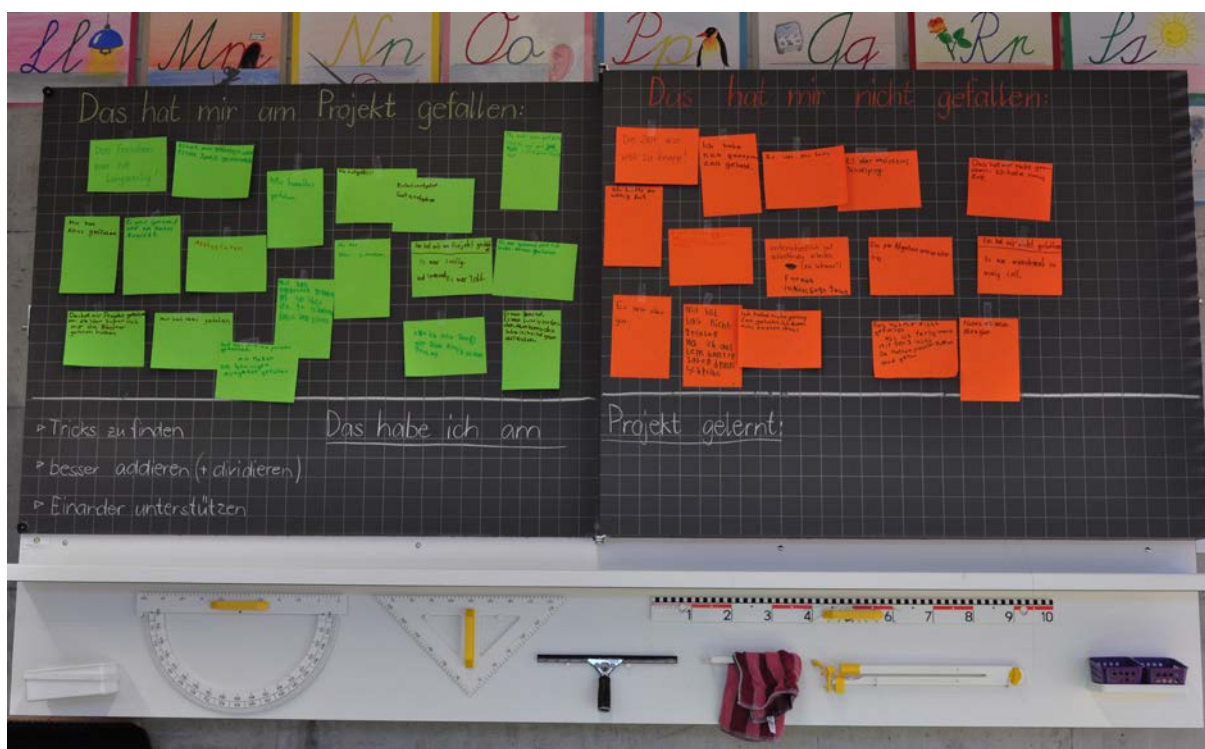


Abbildung 25: Rückmeldungen der Lernenden zur Lernumgebung *Magische Quadrat*, Unterstufe (Foto: Yvonne Liechti, 9.2.2011)

Positiv melden die Lernenden der *Unterstufe* zurück:

- die Arbeitsblätter haben mir gefallen und es hat Spass gemacht,
- es war spannend und ein cooles Projekt
- es war lustig zu forschen
- man konnte den Schwierigkeitsgrad selber auswählen

(Beobachtungsprotokoll 9.2.2011)

Kritische Rückmeldungen:

- die Lernaufgaben waren schwierig
- ich hatte zu wenig Zeit
- nicht alle Lernaufgaben waren interessant

(Beobachtungsprotokoll 9.2.2011)

Quadrato

das Entdeckte kommunizieren
berichten
überlegen
planen
rechnen
lesen
verstehen
(Sproche/ Mofe)
vorstellen
austauschen
aufschreiben
notieren
nach Lösung suchen
Muster erkennen
untersuchen
verändern
adressieren
bestimmen
halten
probieren
versuchen

A

B

C

D

Seite 31 von 37

Die Lernwege und Ergebnisse werden wie vorgesehen auf den Arbeitsblättern (Unterstufe) und in den Mathematikheften (Mittelstufe) festgehalten. Den Lehrpersonen gibt dies einen guten Einblick in die Arbeitsschritte und Denkprozesse der Lernenden. Damit die Lehrpersonen diese in Zukunft noch besser nachvollziehen können, gibt der Fachexperte den folgenden Hinweis:

«Ich habe in den Beobachtungen festgestellt, dass die Kinder stark die Tendenz haben, immer zu radieren und zu löschen. Ich habe verschiedenen Schülerinnen und Schülern gesagt, dass sie alles stehen lassen sollen. Dann könnt ihr nachher besser nachvollziehen, was sie gemacht haben.» (Transkript 21.2.2011)

Die für die Unterrichtssequenz vorgesehene Lernzeit (sechs Lektionen auf der Unterstufe/acht Lektionen auf der Mittelstufe) ist aus Sicht der Lehrpersonen zu knapp bemessen. Nicht alle Lernenden können in diesem Zeitrahmen auf den vier Inseln entsprechende Lernaufgaben vertieft bearbeiten. Bei einer Wiederholung der Unterrichtseinheit wollen die Lehrpersonen mehr Zeit einberechnen. Eine Lehrperson *Mittelstufe* stellt fest:

«Das Zeitliche ging nicht ganz auf. Man hätte noch lange daran arbeiten können, die Lernumgebung ist in dem Sinn nie abgeschlossen. Das ist die Struktur der Lernumgebung, die ist ein bisschen trügerisch. Man hätte immer noch weiter gehen können, die Lernaufgaben auf einem höheren Niveau bearbeiten können.» (Transkript 21.2.2011)

Die Lehrpersonen überlegen, ob sie die Lernaufgaben den Lernenden in ihrem weiteren Unterricht als Wahlaufgaben zur Verfügung zu stellen möchten.

Nach dem Austauschen der allgemeinen Eindrücke diskutieren die Lehrpersonen mit dem Fachexperten über weitere Aspekte der Unterrichtseinheit. Sie machen sich Überlegungen zu den festgelegten Lernzielen und mathematische Kompetenzen, zum altersdurchmischten Lernen und zur Leistungsbeurteilung. Die wichtigsten Ergebnisse der Diskussion werden im Folgenden zusammengefasst.

6.2 Lernziele / mathematische Kompetenzen

Der Lerngewinn der Lernumgebung Magische Quadrate liegt aus Sicht der Lehrpersonen bei den allgemeinen Lernzielen des Mathematikunterrichts im Kanton Bern (Darstellen, Beschreiben, Formulieren, Argumentieren, Entdecken, Begründen, Probleme lösen, Modellieren, vgl. Kapitel 2.1). Durch die Arbeit an diesen Zielen kann bei vielen Schülerinnen und Schülern das Interesse an der Mathematik gefördert werden. So erklärt eine Lehrperson der *Mittelstufe*:

«Es hat selbst in der Mittelstufe Lernende, welche die Werte in den magischen Quadrate nicht berechnen konnten, auch wenn es ganz einfach war. Dafür haben sie beim Tüfteln und Ausprobieren Dinge entdeckt, Muster erkannt. Und das hat ihnen Spass gemacht, das hat sie motiviert. Ich weiss nicht, ob sie sonst solange daran gearbeitet hätten.» (Transkript 21.2.2011)

Die Lehrperson der *Unterstufe* bestätigte diesen Eindruck. Die Lernenden haben mit grossem Einsatz an den Lernaufgaben gearbeitet. Das Anspruchsniveau der Lernaufgaben ist jedoch aus ihrer Sicht für die Schülerinnen und Schüler der ersten Klasse am oberen Limit.

«Mathematisch gesehen war die Überforderung eher da, als die Unterforderung. Aber von der Anlage her fand ich es gut [...]. Es war mehr das Problemlösen, also etwas ausprobieren und dran bleiben [...], das hat die Kinder motiviert.» (Transkript 21.2.2011)

Dass auch mathematisch begabte Lernende ihren Fähigkeiten entsprechend herausgefordert sind, zeigt eine Lehrperson am Beispiel eines Schülers aus der *Mittelstufe* auf:

«B. hat selbstständig einen Term herausgefunden. Er hat gesagt, wenn es ein 3×3 ist muss man immer X mal X plus 1 plus mal 1.5 rechnen. Das gibt 15 [...] Der Fachexperte bestätigt: Das dünkt mich unglaublich, dass so etwas passiert. Dass ein begabter Schüler so gefördert werden kann ausgehend davon, dass man ihm nicht eine spezielle Aufgabe gibt.» (Transkript 21.2.2011)

Das Thema der *Magischen Quadrate* eignet sich in der Einschätzung der Lehrpersonen für entdeckendes Lernen und damit für jahrgangsübergreifendes Lernen im Mathematikunterricht sehr gut. Aus Sicht der Lehrpersonen werden im Austausch nicht nur die mathematischen und überfachlichen Kompetenzen gefördert. Auch sprachliche Kompetenzen wie das Argumentieren und Erklären, Formulieren und Begründen sind wichtig. Sie stellen fest, dass einige Lernende beim Austausch einfach erzählen, andere ihre

Vorgehensweisen differenziert beschreiben. Einzelnen Schülerinnen und Schülern fehlt das Abstraktionsvermögen um zu berichten, was sie genau untersucht und festgestellt haben.

Das Vorhaben der Lehrpersonen in jeder Doppelstunde eine Austauschphase unter den Lernenden durchzuführen, kann in der ersten Doppelstunde realisiert werden. Nach der Einführung in die Lernumgebung erfolgt eine erste Übungsphase. Vor dem Unterrichtsende initiieren die Lehrpersonen im Plenum einen Austausch über die Lernerfahrungen. Je freier die Lernenden im weiteren Unterrichtsverlauf auf den einzelnen Inseln an verschiedenen Lernaufgaben arbeiten, desto anspruchsvoller werden die Organisation und die Durchführung des Austauschs im Plenum. Eine Lehrperson *Mittelstufe* erzählt:

«Manchmal war es schwierig, die Kinder zusammen zu nehmen und zu besprechen. Weil sie halt sehr verstreut an den Lernaufgaben waren. Es gab erst später einen Punkt, wo alle einigermassen etwas von einer Insel gemacht hatten und man es besprechen konnte. Das war so ein bisschen schwierig.»
(Transkript 21.2.2011)

Aus diesem Grund haben die Lehrpersonen den Austausch oft spontan und individuell in Gruppen angeleitet. Die bei der Planung besprochenen Methoden (Gruppenpuzzle, Placemat, Drei-Schritte-Interview) erweisen sich als hilfreich. Damit die Lernenden inhaltlich noch mehr vom Austausch profitieren, möchte eine Lehrperson der *Mittelstufe* die neue Lernmethode vermehrt in ihren Unterricht integrieren. Sie vermutet:

«Je besser die Lernenden mit der Austauschmethode vertraut sind, desto mehr können sie daraus nehmen.» (Transkript 21.2.2011)

Aus ihrer Sicht ist es wichtig, die Lernenden beim Austauschen zu begleiten und die Rollenverteilung vorgängig zu klären. Beispielsweise müssen sich die Lernenden absprechen, wer die Ergebnisse aufschreibt und wer sie präsentiert.

Die für die Auswertung zusätzlich vorbereiteten Arbeitsblätter erweisen sich in der Anwendung als anspruchsvoll. Die Rückmeldungen der Lernenden zeigen auf, dass es ihnen noch nicht immer gelingt, die Metaebene einzunehmen und ihre Lernschritte kritisch zu analysieren. Die Reflexionsfähigkeit muss im Unterricht aufgebaut und trainiert werden.

6.3 Altersdurchmisches Lernen

Die Lehrpersonen diskutieren, inwiefern die Altersdurchmischung bei der Umsetzung der Unterrichtseinheit realisiert wird. Der Fachexperte merkt an, dass die Altersdurchmischung in der Mathematik eine besondere Herausforderung darstellt, weil die Hierarchie der Lerninhalte gegeben ist. Zudem diskutieren die Lehrpersonen, ob die Altersdurchmischung einen Einfluss auf die Auswahl des Schwierigkeitsgrads der Lernaufgabe hat. Es wird zwischen *Unter-* und *Mittelstufe* unterschieden.

6.3.1 Altersmischung auf der Unterstufe

Die Lehrperson gewährt den Lernenden oft die Freiheit, ihre Lernpartnerinnen und –partner selbst auszuwählen. Oft kann beobachtet werden, dass sich diejenigen Lernenden, die an derselben Lernaufgabe arbeiten, zusammenschliessen. Die Gruppen sind meist altersdurchmischt. Wenn die Lehrperson findet, dass die Lernenden ihrem Niveau entsprechend zu einfache oder zu schwierige Lernaufgaben lösen, greift sie ein. Die Lehrperson erzählt:

«Es ist eigentlich so herausgekommen, wie ich es mir vorgestellt habe. Ich habe gesagt, dass ich die Gruppen nicht einteile. Ich beobachte, wer welche Aufgabe wählt und wenn ich das Gefühl habe, dass es zu schwierig oder zu einfach ist, dann frage ich nach. [...] Ich würde sagen, es haben vielleicht 70% die Aufgaben gewählt, die ich ihnen auch gegeben hätte, das traue ich ihnen zu. Etwa 10% haben immer das Einfachste genommen, damit sie am wenigsten Arbeit haben. Und dann gab es auch noch solche, die die schwierigsten Aufgaben genommen haben und gefragt haben, ob sie sie wieder zurücklegen können, weil es ihnen zu schwierig war.» (Transkript 21.2.2011)

6.3.2 Altersmischung auf der Mittelstufe

Eine Lehrperson gibt den Lernenden zu Beginn der Unterrichtseinheit die Vorgabe, jeweils in Zweiergruppen zu arbeiten. Sie dürfen selber wählen mit wem und an welcher Lernaufgabe, aber jeweils nur einmal mit demselben Partner, derselben Partnerin. Die Zusammenarbeit in der Zweiergruppe funktioniert

gut. Die Lehrperson kann beobachten, dass die Lernenden sowohl in altersdurchmischten Gruppen wie auch in jahrgangshomogenen Gruppen arbeiten. Sie schildert ihre Beobachtungen:

«Es gab Aufträge, an denen haben alle zusammen gearbeitet. Aber manchmal haben sie es auch bewusst innerhalb ihrer Klassen gemacht. [...] Es gab einzelne Kinder, also ich sage jetzt 6. Klässler, die andere 6. Klässler suchten. Aber das ist gerechtfertigt. Weil sie zum Teil viel weiter und deutlich stärker sind als die 4. Klässler.» (Transkript 21.2.2011)

In der anderen Klasse der *Mittelstufe* wird die Altersdurchmischung zusätzlich durch die Raumgestaltung (Pultgruppen) unterstützt. Vielfach arbeiten die Lernenden von sich aus oder auf Anweisung der Lehrperson mit denjenigen Lernenden zusammengearbeitet, die an derselben Pultgruppe sitzen. Sie erklärt:

«Einmal habe ich auch bewusst zugewiesen und gesagt, diese Tischgruppe nimmt jetzt Aufgabe A, diese die Aufgabe B und diese Tischgruppe Aufgabe C (Insel Magische Quadrate untersuchen). Und dort war dann alles drin, das ganze Spektrum. Vom schwächsten 4. Klässler bis zur stärksten 6. Klässlerin. Alle hatten denselben Auftrag. Das war machbar, beim Schwächeren einfach mit mehr Begleitung und Hilfe.» (Transkript 21.2.2011)

Die Lehrpersonen beobachten im Unterricht, dass die Lernenden Unterstützung bei erfahrenen Schulkollegen oder -kollegen einfordern.

«Eine Schülerin aus der 4. Klasse hat ein Bild von Eugen Jost angeschaut und versucht, die Symbole zu übersetzen. Und dann kam ein Schüler aus der 6. Klasse und wollte auch einen solchen Auftrag machen. Das Mädchen aus der 4. Klasse hat dies gehört, hat sich umgedreht und gesagt ‚also ich könnte noch Hilfe brauchen‘. Sie hat dem 6. Klässler direkt gesagt, dass er ihr helfen soll. Und das war beiden egal, in welcher Klasse sie sind. Dann haben sie es zusammen gemacht.» (Transkript 21.2.2011)

Die Lehrpersonen stellen fest, dass die Altersmischung grundsätzlich eine motivierende Wirkung erzielt. Die Lernenden trauen sich etwas zu und wählen auch die schwierigen Lernaufgaben aus.

«Und gerade bei den 4. Klässlern habe ich erlebt, dass sie in ein Flow-Erlebnis hinein kamen und unbedingt mal den schwierigsten Auftrag machen wollten: ‚Ich will auch mal das, was die 6. Klässler machen‘. Und sie haben es auch geschafft, sie haben es gut gemacht.» (Transkript 21.2.2011)

Die Lernenden lassen sich bei der Auswahl der Lernaufgaben von anderen Lernenden beeinflussen. Indem sie erfahren, an welcher Lernaufgabe andere arbeiteten, wird ihr Interesse geweckt. Bei der Auswahl wird aber nicht nur auf die Schwierigkeitsstufe geachtet. Eine Lehrperson kann während des Unterrichts beobachten, dass Lernende nach dem Lustprinzip ihre Lernaufgaben auswählen. Sie sagt:

«Ich habe auch beobachtet, dass die Schülerinnen und Schüler je nach Lust und Laune eine Aufgabe auswählten: ‚Jetzt möchte ich etwas Praktisches machen‘, oder: ‚Jetzt habe ich mehr Lust, etwas zu tüfteln‘, das fand ich auch ok.» (Transkript 21.2.2011)

Die Beobachtungen wie auch die Schilderungen der Lehrpersonen zeigen auf, dass sich in den jahrgangsdurchmischten Klassen der Unter- und Mittelstufe eine selbstverständliche Helferkultur etabliert hat. Die Schülerinnen und Schüler wählen diese Arbeitsform zeitweise selbständig aus, da sie auf die gegenseitige Hilfe vertrauen können. Andererseits werden altersdurchmischte Gruppen von den Lehrpersonen bewusst zur Unterstützung des gemeinsamen Lernens gebildet.

6.4 Beurteilung der Lernergebnisse

Die Lehrpersonen diskutierten mit dem Fachexperten über mögliche Beurteilungsformen für die Lernumgebung *Magische Quadrate*. Die neue Lernkultur des selbständigen, entdeckenden und sozialen Lernens verlangt nach einer entsprechenden Beurteilungskultur. Der Fachexperte schlägt den Lehrpersonen vor, analog zur Lernumgebung eine kompetenzorientierte Beurteilung zu entwickeln. Zum Beispiel könnte dies eine zeitlich begrenzte, anspruchsvolle Lernaufgabe im Sinne einer Prüfung sein. Bewertet würden die in der Lernumgebung geförderten Kompetenzen (bspw. Durchhaltewille, Strategien entwickeln, Annahmen treffen, etwas ausprobieren usw.). Zusätzlich ermöglicht dieses Verfahren festzustellen, ob die Lernenden das Gelernte auf andere Lernanlässe übertragen können. Der Fachexperte weist darauf hin, dass beim Festlegen der zu erwerbenden oder zu übenden Kompetenzen die Beurteilungskriterien analog entwickelt werden. Dadurch entsteht eine Kohärenz von Kompetenzen, Lernaufgaben und Beurteilung, welche in einer neuen Aufgabenkultur zum Tragen kommen.

Die Lehrpersonen verwerfen den Vorschlag des Fachexperten, eine Prüfung zu entwickeln und durchzuführen. Sie wollen die vorliegenden Ergebnisse und die Lernwege beurteilen, die sich teilweise in den Mathematikheften rekonstruieren lassen. Aufgrund der zur Verfügung stehenden Zeit schätzen sie diese Vorgehensweise als realistisch ein. Während des Unterrichts war es ihnen möglich, die Lernenden zu beobachten. Die einzelnen Kompetenzen wie bspw. das Erkennen und beschreiben von Mustern oder das Problemlöseverhalten lassen sich aus ihrer Sicht nachträglich beurteilen. Eine Lehrperson äussert sich wie folgt:

«Und dann fände ich es überflüssig eine Prüfung zu machen, bei dem sie nochmals fast das Gleiche machen, nur damit ich es beurteilen kann. Ich habe ja schon gesehen, ob sie es können oder nicht.»
(Transkript 21.2.2011)

Für die Gesamtbeurteilung der Lernumgebung leiten die Lehrpersonen ausgehend von den Zielen des Lehrplans (Erziehungsdirektion 2006/1995) und den mathematischen Kompetenzbereichen mögliche Beurteilungskriterien ab. Massgebend für die Beurteilung sind die schriftliche Produkte und die Beobachtungen aus dem Unterricht (bspw. das Arbeitsverhalten, die Selbstständigkeit, die Ausdauer und das Problemlöseverhalten). Aufgrund der gemeinsam diskutierten Beurteilungskriterien entwerfen die Lehrpersonen im Anschluss an die Besprechung ein Beurteilungsraster (vgl. Abbildung 27). Die Lernenden erhalten von den Lehrpersonen anhand des Beurteilungsrasters und ergänzenden Bemerkungen eine Rückmeldung.

Lernspuren im Heft:	Sehr gut	Gut	Genügend	Ungenügend
Muster erkennen und Strukturen beschreiben				
Vorgehen und Erkenntnisse formulieren				
Magische Quadrate erfinden, ergänzen, richtig und zügig operieren				
Beobachtungen aus dem Unterricht	Sehr gut	Gut	Genügend	Ungenügend
Selbstständigkeit				
Unterstützung organisieren und nutzen				
Systematisches und zielorientiertes Vorgehen				
Ausdauerndes und vertiefendes Arbeiten				

Abbildung 27: Beurteilungskriterien zur Lernumgebung Magische Quadrate (Yvonne Liechti, Sandra Luginbühl, Simone Mast)

Das abgebildete Beurteilungsraster ist vierstufig. Zwei Kriterien (Lernspuren im Heft) beziehen sich auf mathematische Kompetenzen. Drei Kriterien (Beobachtungen aus dem Unterricht) auf das Arbeitsverhalten.

6.5 Fazit der Rückschau

Die Lehrpersonen möchten die erarbeitete Lernumgebung weiterentwickeln und zu einem späteren Zeitpunkt wieder einsetzen. Sie können sich vorstellen, dass alle Lernenden der Mehrjahrgangsklasse mindestens einmal am Thema *Magische Quadrate* arbeiten. Falls die Lernumgebung alle drei Jahre zum Einsatz kommt, werden einige Lernende sogar zwei Mal daran arbeiten. Der Bezug zu bisherigen Lernerfahrungen, der spezifisch das Thema *Magische Quadrate* aufnimmt, entsteht somit längerfristig. Die Lernaufgaben müssen allerdings überprüft und beispielsweise den Lernvoraussetzungen der Lernenden des ersten Schuljahres besser angepasst werden.

Die Lehrpersonen erachten es als Gewinn, während längerer Zeit am selben Thema zu arbeiten. Vor allem die jüngeren Schülerinnen und Schüler schätzen es, einmal das Gleiche zu machen wie die Grossen. Bei den älteren, beziehungsweise mathematisch stärkeren Lernenden befürchten die Lehrpersonen, dass sie inhaltliche unterfordert sind. Überrascht stellen sie jedoch fest, dass sich starke Lernende selber eine Herausforderung gestellt haben:

«D. hat sich eine Aufgabe eigentlich schwieriger gestellt, als ich es je getan hätte.» (Transkript 21.2.2011)

Die von den drei Lehrpersonen entwickelte Unterrichtseinheit zeichnet sich insbesondere durch die Orientierung an den fachlichen und überfachlichen Kompetenzen (vgl. Lehrplan 21) und durch die Gestaltung der vielseitigen Lernaufgaben, welche offene und individuelle Lernwege zulassen, aus.

Das Format der Lernumgebung mit der Navigationskarte kann problemlos auf andere mathematische Lernformate wie beispielsweise Zahlentafeln oder Zahlenreihen übertragen werden. Der Vorteil ist, dass die Lernenden mit der Zeit mit dieser Unterrichtsformat vertraut sind und sich rasch darin zurechtfinden. Nach einer kurzen Einführung ist ein selbstständiges Arbeiten möglich.

Denkbar ist auch eine Übertragung der Navigationskarte auf andere Schulfächer, z.B. das Fach Deutsch. Entsprechende Kompetenzinseln müssten bestimmt und entsprechende Lernaufgaben entwickelt werden.

7 Literatur

- Affolter, W.; Amstad, H.; Doebeli, M.; Wieland, G. (2009a). *Schweizer Zahlenbuch 5. Begleitband mit CD-ROM*. Zug: Klett und Balmer Verlag.
- Affolter, W.; Amstad, H.; Doebeli, M.; Wieland, G. (2009b). *Schweizer Zahlenbuch 5*. Zug: Klett und Balmer Verlag.
- Affolter, W.; Amstad, H.; Doebeli, M.; Wieland, G. (2010a). *Schweizer Zahlenbuch 6. Arbeitsheft*. Zug: Klett und Balmer Verlag.
- Affolter, W.; Amstad, H.; Doebeli, M.; Wieland, G. (2010b). *Schweizer Zahlenbuch 6. Begleitband mit CD-ROM*. Zug: Klett und Balmer Verlag.
- Affolter, W.; Amstad, H.; Doebeli, M.; Wieland, G. (2010c). *Schweizer Zahlenbuch 6*. Zug: Klett und Balmer Verlag.
- Bieber, G. (2008). *Zur Weiterentwicklung von Flex: Veränderung der Aufgabenkultur*. In: Liebers, K. et al. Die flexible Schuleingangsphase. Evaluationen zur Neugestaltung des Anfangsunterrichts. Beltz Verlag.
- Bloom, B. S. (1976). *Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich* (5. Aufl.). Weinheim: Beltz.
- Breuer, J. (2000). Selbstgesteuertes Lernen, kooperatives Lernen und komplexe Lehr- /Lernmethoden – Analyse der Formen im 'herkömmlichen' Präsenzlernen sowie deren Unterstützung durch das Internet. In F. H. Esser, M. Twardy und K. Wilbers (Hrsg.). *e-Learning in der Berufsbildung* (S. 85 – 171). Markt Schwaben: Eusl.
- Brüning, L. & Saum, T. (2008). *Handlungsanleitung Placemat*. Zugriff am 9.11.2011 auf die Methodenplattform IQES zu kooperativem Lernen http://www.iqesonline.net/index.cfm?id=9491f280-e0c6-b4e6-2380-a76ecce798c7&doc_id=a7f69a40-e0c6-b4e6-2cd4-a8ad7204d1d5.
- Brüning, L.; Saum, T. (2009). *Erfolgreich unterrichten durch Kooperatives Lernen. Neue Strategien zur Schüleraktivierung. Individualisierung- Leistungsbeurteilung. Schulentwicklung*. Essen: Neue Deutsche Schule Verlagsgesellschaft mbH.
- Green, N. (2009). *Kooperatives Lernen im Klassenraum und im Kollegium*. Seelze Velber: Klett/Kallmeyer.
- Grossenbacher, B.; Sauer, E.; Wolff, D. (2012). *Mille feuilles – neue fremdsprachdidaktische Konzepte. Ihre Umsetzung in den Lehr- und Lernmaterialien*. Bern: Schulverlag plus.
- Hirt, U.; Luginbühl, S.; Röthlisberger, E.; Uhlmann, C. (2002-2003). *Planen Differenzieren Beurteilen mit dem Zahlenbuch 5 und 6*. Bern: Schulverlag blmv AG.
- Krauthausen, G. & Scherer, P. (2010). *Umgang mit Heterogenität. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule*. Download am 26.8.2011 [pdf] von http://www.sinus-an-schulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Krauthausen-Scherer.pdf.
- Laging, R. (2003). *Altersgemischtes Lernen in der Schule*. Hohengehren: Schneider Verlag.
- Nührenböcker, M.; Prust, S. (2006). *Mit unterschieden rechnen. Lernumgebungen und Materialien für einen differenzierten Anfangsunterricht Mathematik*. Kallmeyer.
- Opitz, E. M. (2010). Mathematik – (k)ein Inhalt für 4- bis 6- jährige?! M. Leuchter (Hrsg.), *Didaktik für die ersten Bildungsjahre. Unterricht mit 4- bis 8- jährigen Kindern* Zug: Klett und Balmer, S. 147-162.
- Opitz, E. M. (2010a). Innere Differenzierung durch Lehrmittel: (Entwicklungs-) Möglichkeiten und Grenzen am Beispiel von Mathematiklehrmitteln. In Organ der Schweizerischen Gesellschaft für Lehrerinnen- und

Lehrerbildung (SGL) (Hrsg.), *Beiträge zur Lehrerbildung 28 (1)*. Zeitschrift zu Theorie und Praxis der Aus- und Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrern (S. 53-60).

Sacher, W. (2009). Die Planung und Anlage von Prüfungen. In ders. (Hrsg.). *Leistungen entwickeln, überprüfen und beurteilen* (5., überarbeitete und erweiterte Auflage) (S. 55-83). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Scherer, P. (2008). Mathematiklernen in heterogenen Gruppen – Möglichkeiten einer natürlichen Differenzierung. In H. Kiper et al. (Hrsg.). *Lernarrangements für heterogene Gruppen. Lernprozesse professionell gestalten* (S. 199-212). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Wittmann, E. C.; Müller, G. N. (2007a). *Schweizer Zahlenbuch 1. Arbeitsheft*. Zug: Klett und Balmer Verlag.

Wittmann, E. C.; Müller, G. N. (2007b). *Schweizer Zahlenbuch 1. Schulbuch*. Zug: Klett und Balmer Verlag.

Wittmann, E. C.; Müller, G. N. (2007c). *Schweizer Zahlenbuch 2. Begleitband mit CD-ROM*. Zug: Klett und Balmer Verlag.

Wittmann, E. C.; Müller, G. N. (2007d). *Schweizer Zahlenbuch 2*. Zug: Klett und Balmer Verlag.

Wittmann, E. C.; Müller, G. N. (2008a). *Schweizer Zahlenbuch 1. Begleitband mit CD-ROM*. Zug: Klett und Balmer Verlag.

Wittmann, E. C.; Müller, G. N. (2008b). *Schweizer Zahlenbuch 3. Begleitband mit CD-ROM*. Zug: Klett und Balmer Verlag.

Wittmann, E. C.; Müller, G. N. (2008c). *Schweizer Zahlenbuch 3*. Zug: Klett und Balmer Verlag.

www.lehrer-online.de/magisches-quadrat-digital.php [15.5.2012]

<http://www.onpulson.de/lexikon/1308/erfahrungslernen> [20.10.2011]

<http://de.wikipedia.org/wiki/Moosgummi> [20.8.2012]